美国新数学丛书

不等式入门

E.贝肯巴赫 R.贝尔曼 著

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

北京大学出版社

不等式入门

E.贝肯巴赫　R.贝尔曼　著

文　丽　译

北京大学出版社

内 容 提 要

不等式与各个数学分支都有密切的联系，本书是关于不等式的一个导引。作者从“大于”、“小于”关系以及数的“绝对值”的意义开始，逐步引入一些分析学中最常用、最基本的不等式；并利用这些结果去讨论一些有趣的极大与极小问题；最后，对欧氏距离的概念作了推广，并介绍了一些非欧几里得距离。

本书写得深入浅出、生动直观、有趣而富有启发性，适合于广大高中学生、大学低年级学生课外阅读。这本书也可以作为中学数学教师、师范院校数学教师以及有关科学工作者的参考书。

Edwin Beckenbach   Richard Bellman

AN INTRODUCTION TO INEQUALITIES

美国"新数学丛书"选译书目

（标△号者表示已经出版或即将出版）

书名	著者		译者	
拓扑学的首要概念	陈锡驹 N.E. 斯梯罗特	著	江泽涵 蒋守方	译
	（上海科学技术出版社出版）			
从毕达哥拉斯到爱因斯坦	K.O. 弗里德利希	著	张恭庆	译
科学中的数学方法	G.波利雅	著	邓东皋	译
数学中的智巧 △	R.亨斯贝尔格	著	李 忠	译
有趣的数论 △	O.奥尔	著	潘承彪	译
连分数 △	C.D.奥尔德斯	著	张顺燕	译
无限的用处	L.兹平	著	应隆安	译
不等式入门 △	E.贝肯巴赫 R.贝尔曼	著	文 丽	译
几何不等式	N.D.卡扎里诺夫	著	刘西垣	译
几何学的新探索 △	H.S.M.考克瑟特 S.L.格雷策	著	陈维桓	译
几何变换 I	U.M.亚格龙	著	尤承业	译
几何变换 II	U.M.亚格龙	著	詹汉生	译
几何变换 III	U.M.亚格龙	著	章学诚	译
几何变换 IV	U.M.亚格龙	著	姜伯驹	译
选择的数学	I.尼温	著	程乾生	译
早期数学史选篇	A.艾鲍	著	周民强	译

目　　录

作 者 简 介

爱德温·贝肯巴赫1906年生于得克萨斯州，达拉斯市。1931年在赖斯（Rice）学院取得哲学博士学位。自1945年起，任加利福尼亚大学洛杉矶分校数学教授。1958—1959年，他是瑞士苏黎世高等工艺学院古根海姆（Guggenheim）奖金获得者。贝肯巴赫教授曾是太平洋数学杂志（Pacific Journal of Mathematics）的创始编辑，并且是美国数学月刊（American Mathematical Monthly）的副主编。他发表了《工程师用现代数学》（Modern Mathematics for the Engineer）卷1与卷2；《保角映射的构造与应用》（Construction and Application of Conformal Maps），以及与理查德·贝尔曼合著的《不等式》（Inequalities）。

理查德·贝尔曼1920年生于纽约。1946年在普林斯顿（Princeton）大学数学方面取得了哲学博士学位。直到1952年，曾执教于普林斯顿大学与斯坦福（Stanford）大学。此后加入兰德公司（RAND Corporation）。第二次世界大战期间，他作为洛斯阿莫斯原子弹特殊工程部的一个成员，在雷达和声纳方面工作。1956年，他和别人一起，发展了美国管理协会的商业策略；自1958年起，他与斯隆-凯特林研究院配合，研究癌的化学疗法的数学问题。在他的著作中，有《动态规划》（Dynamic Programming），《调节控制过程：导游》（Adaptive Control Processes: A Guided Tour），《数学经典——1：分析》（Mathematical Clas-

sics——1: Analysis）以及《动态规划的计算》（Computational Aspects of Dynamic Programming）。他是数学分析及应用月刊（Journal of Mathematical Analysis and Applications）的创始编辑。

翻译说明

要学好数学，必须喜爱数学。入门的书对于启发读者的兴趣和爱好关系很大。一本好书循循善诱、引人入胜；相反，则望而生畏、令人却步。

由于种种原因，数学往往被罩上一层神秘的面纱。好奇的中学生、热心的中学老师和各条战线上广大的科教工作者都渴望了解：究竟什么是数学？它有哪些主要方面？近代数学研究什么问题？有哪些重要的数学思想和成就？

为了满足这些要求，我们组织选译了这套“新数学丛书”，向广大读者推荐。

和一般的通俗数学读物不同，“新数学丛书”的选题既不是介绍某些有趣的数学问题，也不是传授专门的解题技巧；而是向未必具有很深数学修养的读者系统地介绍一些与近代数学有关的数学分支中的专题。这套书选题面较广，涉及代数、几何、分析、拓扑、概率、计算机以及数学在力学、物理等方面的应用。内容虽然浅显，但却抓住了核心和基本的数学思想。

这套书还有一个特点：选写人大多数是该领域中的著名学者，学术造诣精深、热心普及数学教育；因此能高瞻远瞩、深入浅出，生动而严肃，简明而不失全貌。

这套丛书不仅可以作为高中学生和大学低年级学生的课外读物，而且对于想了解近代数学思想和方法的科教工作者也提供了一条门径。

“新数学丛书”首创于一九六一年，已陆续出版近三十册。有些书早已脱销。“新数学丛书”编委会，特别是 Anneli Lax 教授，得知我国有意翻译这套丛书后，慷慨地赠送了全套样书。在此，我们表示衷心的感谢。

江泽涵　张恭庆

一九八三年春于北京大学

致 读 者

这本书是专业数学家编写的一套丛书中的一本。编写这套书的目的是要向广大的中学生和非专学数学的外行人把一些重要的数学概念说明得有趣且能懂。“新数学丛书”中的大多数书所讨论的课题通常不属于中学课程表的范围，各书的难易程度不同，甚至在同一本书里，有些部分就比其它部分更需要全神贯注才能读懂。虽然读者要懂得这套丛书中的大多数书，并不需要多少专门知识，但是他必须动一番脑筋。

如果读者从来只在课堂上才遇到数学，那他就应该牢记：数学书不能读得很快。他也一定不要期望，读第一遍的时候就能理解书的全部内容。复杂的部分他应该自由地跳过去，以后再回过头来读；一个论点常常是通过后面的话才能搞清楚。另一方面，内容十分熟悉的一些节可以读得很快。

学数学的最好办法是“做数学”；每一本书都包含问题，其中有些可能需要很可观的思考。劝告读者养成读书时手边备有纸和笔这一习惯，这样读，他会越来越觉得数学有趣味。

这套书的编印是一种新的冒险。我们愿在此申明并致谢，在准备这套书时，许多位中学师生曾慷慨协助。编辑者欢迎读者提出意见。请函告 Editorial Committe of the NML series, New York University, The Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, N.Y. 10012.

编辑者

序　言

有人把数学称为同义反复的科学，也就是说，有人指责数学家花费时间去证明那些等同于自身的东西。这种说法（恰如其分地说，这是一个哲学家说的）有两点是很不准确的：第一，虽然数学只是自然科学的语言而不是一门自然科学，但是，确切地说，它是一种创造性的艺术；第二，数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式。

下面我们介绍不等式理论的三个方面。首先，第一、二、三章介绍公理。其次，第四章利用前几章的结果导出分析学中几个基本不等式，这些不等式是被数学家们所一再使用的。第五章说明怎样利用它们来推导几何学中初等对称图形的一些有趣而又重要的极大、极小性质，这些图形包括：正方形、立方体、等边三角形等等。最后，第六章研究距离的某些性质，并给出几种不常见的距离函数。

这本书是为有多种口味的人写的，其中的材料可以按顺序去读，也可以分开来读。有些读者想要了解对于高等数学来说是很基本的那些公理方法，他们会喜欢前三章。此外，在第三章里还有许多与不等式相联系的带启发性的图形。另外一些读者宁愿暂时认为这些结果都是理所当然的而直接转向更多的分析学的结论，他们会发现第四章是合口味的。也有些读者对于一题多解感兴趣，喜欢用初等不等式解决那些通常要依靠微积分去讨论的问题，第五章可以满足他们的需要。对于推广概念和结果有兴趣的读者，则会欣赏第六章所描述的对于一些奇怪的非欧几里得距离的分析。

被这本书的材料激起了求知欲的读者，可以去读一本论述本专题的经典著作：哈代等著的《不等式》一书①。还有一本比较近代的、包含不同类型结果的著作是E. 贝肯巴赫和R. 贝尔曼的《不等式》(Inequalities, by E.F. Beckenbach and R.Bellman, Ergebnisse der Mathematik, Julius Springer Verlag, Berlin, 1961)。

E.贝肯巴赫　R.贝尔曼

圣他·慕尼卡　加利福尼亚　1960年

① 赵民义译，不等式，科学出版社，1965年3月。——译者

第一章　基本原理

1.1　关系式"大于"

我们知道，记号"$>$"是"大于"的意思，因此很容易回答这个问题：$3>2$对吗？当然，这是对的。

那么，"$-3>-2$"对不对呢？大家都说-3是比-2"负得多"的数，但是这样说并没有正面回答问题。

实数(包括零，正、负有理数及正、负无理数)之间的大小关系到底是怎样确定的呢？通常，我们在几何上是这样做的：取一根指向右方的水平刻度尺作为实数轴，用它上面的点来表示实数，这样便在实数与实数轴上的点之间建立了一一对应的关系。按照规定，这些点从左到右依次出现时，它们所表示的实数便从小到大变化。如图1.1所示。

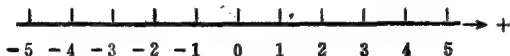


图1.1　实数轴

由于点-2位于点-3的右边，因此$-2>-3$。同样，有

$$4>-4,\ 3>2,\ 0>-2,\ -1>-2,\ 1>0. \tag{1.1}$$

一般说来，我们有以下确定实数之间不等式关系的几何规则：

假设a，b为任意两个实数，将它们用实数轴上的点来表示，那么当且仅当点a位于点b的右边时，实数a，b之间有关系$a>b$。

根据这一几何规则，便知"$-3>-2$"是不对的。

用代数方法处理不等式往往比用几何方法更加有效，甚至更为必要。按照正数的基本概念，上述几何法则有等价的简单的代数定义：

定义 若 a 与 b 是任意两个实数，则当且仅当 $a-b$ 是一个正数时，有 $a>b$。

例如，若 $a=-2$，$b=-3$，则 $a-b=-2-(-3)=1$ 是正数，因此 $-2>-3$，这与利用上述几何法则所得出的结论是一致的。大家还可以用现在的代数方法（即相减的方法）去检查(1.1) 中的不等式。最后，请利用几何及代数两种方法验证下列不等式：

$$\pi>3,\ 2>0,\ 1>-9,\ \sqrt{2}>1,\ -\frac{1}{2}>-40.$$

1.2 正数集合，负数集合及零集合

上一节根据正数定义了不等式 $a>b$。大家将会看到，正数集合 P，负数集合 N，以及只有一个元素 0 的特殊集合 O 在不等式的研究中起着很基本的作用。此外，实数系的代数（域）性质，例如交换律、结合律及分配律也都随时要用到。我们这本小册子的一个基本论点是：实数系的所有次序关系——一切代数不等式——是建立在正数集合 P 的两条简单公理之上的。我们在下一节再来介绍这些公理。

我们把“a 是正的”用符号“$a\in P$”来表示，读作“a 是集合 P 的一个元素”。例如 $5\in P$，$0\in O$，$-3\in N$。

下面，我们来粗略地看一看集合 P,N,O 以及它们的元素。

数零是集合 O 的唯一元素；对于任何实数 a，0 满足等式

$$a+0=a。$$

关于负数集合N，重要的是区别开下面两个概念：一个负数与一个数的相反数。

数a的相反数$-a$是这样定义的：

$$a+(-a)=0。$$

例如，若$a=-3$，则a的相反数$-a$就是$-(-3)=3$，这是因为有$(-3)+(3)=0$。同样，若$a=0$，则因为$0+0=0$,所以$-a=0$。

负数则定义为正数的相反数。$3,1/2,9/5,\pi,\sqrt{2}$都是正数，因此$-3,-1/2,-9/5,-\pi,-\sqrt{2}$都是负数。

我们不想去定义什么是正数，只打算用两条基本公理来刻划它们。

1.3 基本不等式公理

下面几个关于正数集合P的简单命题，是不加证明地叙述出来的，因此，我们称它们为公理。值得注意的是，对于不等式理论来说，这些公理以及大家所熟悉的关于实数系① 的代数结构，是所需要的仅有的几个命题。

公理Ⅰ 若a为实数，则下述论断有且只有一个成立：a是集合O的唯一元素；a是正数集合P的一个元素；$-a$是集合P的一个元素。

公理Ⅱ 若a,b是正数集合P的两个元素，则$a+b$与ab也是集合P的元素。

公理Ⅰ中的三种可能性说明，任意一个实数a与其相反数$-a$之间有如下关系：若a是零，则$-a$也是零；若a是

① 见第8页后面的注。

正数，则根据上述关于负数的定义，$-a$ 就是负数；若 $-a$ 是正数，则由负数定义，$a=-(-a)$ 必是负数。于是 a 与 $-a$ 的关系可以用表 1 列出。

表1　数对 a 与 $-a$

数	集	合	
a	P	N	O
$-a$	N	P	O

在几何表示(图1.1)中，代表 a 与 $-a$ 的点，要么与代表数 0 的点重合，要么位于与此点相对的两侧。

1.4　公理 I 的重述

如上所述，公理 I 与正数集合 P 有关，而不等式 $a>b$ 则是用 $a-b$ 为正数来定义的，也与集合 P 有关，因此，我们可以用不等式语言来重述公理 I。

若 a,b 是实数，则 $a-b$ 也是实数；对 $a-b$ 应用公理 I，便知或者 $(a-b)\in O$(即 $a=b$)，或者 $(a-b)\in P$(即 $a>b$)，或者 $-(a-b)=(b-a)\in P$(即 $b>a$)。这三种可能性是互相排斥的。于是得到公理 I 的推论：

公理 I′　若 a,b 为实数，则下列关系式有且只有一个成立：

$$a=b,\quad a>b,\quad b>a.$$

特别说来，当 $b=0$ 时，公理 I′表明，若 a 为实数，则下面三个论断有且只有一个成立：$a=0$(即 $a\in O$)；$a>0$ (即 $a\in P$)；$0>a$(即 $-a\in P$)。这就说明了从公理 I′可以推出公理 I。

如果从命题 T 能推出命题 S，即 S 是 T 的推论，那么我

们就说“T蕴涵S”．如果两个命题彼此互相蕴涵，那么就说它们是等价的。从上面的讨论知道，公理Ⅰ蕴涵公理Ⅰ′，同时公理Ⅰ′也蕴涵公理Ⅰ，因此，公理Ⅰ与公理Ⅰ′等价，公理Ⅰ′也就是公理Ⅰ的重述。

下面举例说明公理Ⅰ与公理Ⅰ′.考虑数$a_1=3$，$a_2=-4$，$b_1=0$，$b_2=3$。

显然，$a_1\in P, -a_2\in P, b_1\in O, b_2\in P$；$a_1 \overline{\in} O$（读作“$a_1$不是集合$O$的元素”），$-a_1 \overline{\in} P$，等等，即公理Ⅰ成立。

为了说明公理Ⅰ′，注意到

$$a_1-b_1=3-0=3,\qquad a_1-b_1>0,\qquad a_1>b_1;$$
$$a_1-b_2=3-3=0,\qquad a_1-b_2=0,\qquad a_1=b_2;$$
$$a_2-b_1=-4-0=-4,\qquad b_1-a_2>0,\qquad b_1>a_2;$$
$$a_2-b_2=-4-3=-7,\qquad b_2-a_2>0,\qquad b_2>a_2,$$

便知公理Ⅰ′所说的三种关系有且只有一个成立。下一节我们还将向读者介绍所谓附加的不等式关系，并用来表达公理Ⅰ′。

1.5 附加的不等式关系

不等式$b>a$可以写成$a<b$，读作“a小于b”。这两个不等式是完全等价的，而且一般说来，并非这一个总是比那一个更为可取。在上面举例说明公理Ⅰ′时，为了一致起见，我们自始至终都用记号“$>$”．不过，今后更常用的办法是把字母a一致地写在字母b前面，这样就有

$$a_1>b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_2<b_1,\quad a_2<b_2. \tag{1.2}$$

类似地，还有

$$-4<4,\quad 2<3,\quad -2<0,\quad -2<-1,\quad 0<1,$$
$$3<\pi,\quad 0<2,\quad -9<1,\quad 1<\sqrt{2},\quad -40<-1/2.$$

在这里，记号“$>$”与“$<$”都表示严格不等式。

在不等式研究中，还需考虑两个关系式，这就是混合不等式 $a \geqslant b$ 与 $a \leqslant b$，分别读作“a 大于或者等于 b”及“a 小于或者等于 b”。关系式 $a \geqslant b$ 是指：或者 $a > b$，或者 $a = b$；例如，$3 \geqslant 2$，$2 \geqslant 2$。关系式 $a \leqslant b$ 是指：或者 $a < b$，或者 $a = b$；例如 $1 \leqslant 2$，$2 \leqslant 2$。

(1.2)式表明，在每个例子中，公理Ⅰ′中三个关系式有一个是成立的。公理Ⅰ′则进一步断言，这些关系式也只有一个成立。因此，还应当加上这样一些论断：

$$a_1 \nleqslant b_1, \quad a_1 \ngeqslant b_2, \quad a_2 \ngeqslant b_1, \quad a_2 \ngeqslant b_2, \qquad (1.3)$$

读作“ a_1 既不小于也不等于 b_1”等等。

读者会觉得象(1.3) 中的这些反面叙述是多余的，这是由于大家都认为公理Ⅰ或公理Ⅰ′中的互相排斥的原则（即“有一个且只有一个”）是理所当然的事实。因此沒有人会说(1.2)所包含的信息不完整，还要象(1.3)那样把否定的关系式全部写出来。

根据互相排斥的原则，(1.2)和(1.3)中的相应关系式显然是等价的；即从一个可以推出另一个。但是尽管如此，一个不等式的否定往往还是很有用处的。

如果将两种记号“$>$”和“$<$”混着用，那么记号较大的(开的)一端朝着较大的数，较小的(尖的)一端朝着较小的数。

1.6 包含着负数的乘积

一个正数与一个负数的乘积是什么样的数？两个负数的乘积又是怎样的数呢？我们可以用公理Ⅰ，Ⅱ和它们的一些推论来回答这些问题。

若 $a\in P, b\in N$，则由表 1 知 $-b\in P$，再由公理Ⅱ，便知 $a(-b)\in P$。从而由负数的定义得到 $-[a(-b)]\in N$。又由代数法则可知，减号与圆括号可以交换，于是 $-[a(-b)]=-[-(ab)]=ab$，即

$$-[a(-b)]=ab.$$

因此 $ab\in N$。于是得到下面的结果：

定理1.1 正数与负数的乘积是负数。

类似地，若 $a\in N$，$b\in N$，则由表 1 知 $-a\in P$，$-b\in P$。再由公理Ⅱ，乘积 $(-a)(-b)\in P$。但是根据代数法则，$(-a)(-b)=ab$，因此 $ab\in P$。从而得到结果：

定理1.2 两个负数的乘积是正数。

特别地，由定理 1.2 及公理Ⅱ知，任何不为零的实数的平方是一个正数。当然，$0^2=0$。这样我们便得到了不等式理论中的一个最简单、最有用的结果：

定理1.3 任何实数 a 满足不等式 $a^2\geqslant 0$。当且仅当 $a=0$ 时，等号成立。

1.7 “正”数及“负”数

到目前为止，公理Ⅰ和公理Ⅱ的威力已经显示出来了。其实它们的威力还不止于此。我们就会看到，利用公理Ⅰ和公理Ⅱ，可以断定非零实数中哪一个是正的，哪一个是负的。假如你们过去还不知道这些事的话，那也许会对下面的讨论感兴趣。

我们暂时用引号内的“正”和“负”来表示这些结果。

现在从 $a=1$ 开始。$a\neq 0$，由定理 1.3，$a^2>0$，即 a^2 是“正”数。又 $a^2=1^2=1$，因此 1 是“正”数。

再看 $a=2$。已经断定 1 是“正”数，而 $1+1=2$，于是

由公理Ⅱ知，两个“正”数的和即 2 是“正”数。

令 $a=1/2$；则 $2a=1$。即“正”数 2 与数 a 的乘积是“正”数 1。但是，若 a 是“负”数，则由定理1.1，2 与 a 的乘积就是“负”数；这是不可能的。因此 $a=1/2$ 必是“正”数。

这样，数1，2，1/2都是“正”数，从而由表 1 知 -1，-2，$-1/2$都是“负”数。

继续下去，我们不难说明整数3，4等等；分数1/3，1/4等等；以及分数 2/3，4/3，3/4，5/4 等等都是“正”数，相应的 -3，-4，$-1/3$等等都是“负”数。从而对于任何一个非零有理数，我们都能断定它是“正”数还是“负”数。

利用上面关于有理数的判断以及定义无理数的极限方法，我们就能确定任何给定的无理数在完备的有序实数域①中究竟是“正”数还是“负”数。本书不打算详细讨论无理数，如果读者有兴趣，那么可以去读这套丛书中的《数：有理数与无理数》(Number: Rational and Irrational)，作者：伊凡·尼温(Ivan Niven)。

习 题 一

1. 在指向右方的水平刻度尺即实数轴上，作一个草

① 有序指：满足公理Ⅰ和公理Ⅱ。完备指以下基本性质：一个非空的实数集合如果有上界，那么必有最小上界。例如，$\sqrt{2}$的有理数近似值组成的集合$\{1, 1.4, 1.41, \cdots\}$有上界 2 或1.5，因此有最小上界，我们把它记作$\sqrt{2}$。在实数轴（见图1.1）上，表示此最小上界的点把该轴分为左边部分与右边部分。既然左边部分至少有一个正的有理数（例如 1 或1.4)，因此$\sqrt{2}$是“正”数。在第1.7节中，我们已经证明有理数可以用唯一的方式排出次序，因此，实数也可以用唯一的方式排出次序。当我们通过有理数去定义实数时，总要利用这种完备有序的性质。因此我们把它当作实数系的一个公设，而不作为不等式理论中的公理Ⅲ。

图，表示出以下各点：

$$3,\quad -1,\quad 0,\quad -1.5,\quad \pi-3,$$
$$3-\pi,\quad \sqrt{2},\quad 2,\quad -2,\quad -3.$$

并按依次增加的顺序，用形如 $a<b<c$ 等等的连续不等式将这些数重新写出来。

2. 如果结论有错，就请将 $\in$ 改为 $\overline{\in}$：

(a) $-3\in N$；　　(b) $0\in P$；

(c) $5\in O$；　　(d) $\sqrt{2}\in N$；

(e) $(\pi-3)\in P$；　　(f) $a^2\in N$；

(g) $(a^2+1)\in P$；　　(h) $-2^2\in P$；

(i) $(a^2+1)\in O$；　　(j) $-3\in P$。

3. 用 P，N 或 O 填空：

(a) $\frac{48}{273}-\frac{49}{273}\in$ ____；　　(b) $\frac{721}{837}-\frac{721}{838}\in$ ____；

(c) $\frac{-23}{32}-\frac{-25}{32}\in$ ____；　　(d) $\frac{-23}{32}-\frac{-23}{33}\in$ ____；

(e) $\frac{-1}{-2}-\frac{1}{-2}\in$ ____；　　(f) $7^2-4(2)(6)\in$ ____；

(g) $93\left(72+\frac{1}{2}\right)-93(72)\in$ ____；

(h) $93\left(72-\frac{1}{2}\right)-93(72)\in$ ____；

(i) $\frac{2+3}{4+5}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\right)\in$ ____；

(j) $(-3)^2-3^2\in$ ____。

4. 用 $>$，$<$ 或 $=$ 填空：

(a) $\frac{48}{273}$——$\frac{49}{273}$；　　(b) $\frac{721}{837}$——$\frac{721}{838}$；

(c) $\frac{-23}{32}$——$\frac{-25}{32}$；　　(d) $\frac{-23}{32}$——$\frac{-23}{33}$；

(e) $\frac{-1}{-2}$——$\frac{1}{-2}$；　　(f) 7^2____$4(2)(6)$；

(g) $93\left(72+\frac{1}{2}\right)$____$93(72)$；

(h) $93\left(72-\frac{1}{2}\right)$____$93(72)$；

(i) $\frac{2+3}{4+5}$——$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\right)$；

(j) $(-3)^2$____3^2。

5．在对的地方标上T，在错的地方标上F：

(a) $-2\geqslant-3$____；　　(b) $0\leqslant0$____；

(c) $0>-1$____；　　(d) $\frac{1}{2}<\frac{1}{3}$____；

(e) $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}$____；　　(f) $-1\leqslant2$____；

(g) $\frac{3}{2}<\frac{3}{4}$____；　　(h) $-\frac{2}{5}\geqslant-\frac{3}{5}$____；

(i) $1-2^2<-2^2$____；　　(j) $1<0$____。

6．写出下列各数的相反数：

$$-2，\ 3-\pi，\ (3-\pi)^2，\ \frac{a}{b-c}，\ 0，\ \sqrt{b^2-4ac}。$$

7．在下列空白处，给出与所述的否定关系式等价的肯定关系式：

(a) $a \nless b$, a____b;　　(b) $a \neq b$, a____b;

(c) $a \ngtr b$, a____b;　　(d) $a \nleqslant b$, a____b;

(e) $a \ngeqslant b$, a____b;　　(f) $a \gtreqless\!\!\!\!/\, b$, a____b。

8．说明每一个正数 p 大于每一个负数 n。

9．对于两个实数 a 和 b，如果能证明 $a \geqslant b$ 和 $a \leqslant b$，那么，能得出什么单一的结论？

10．从公理Ⅱ，利用数学归纳法证明：如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数，那么，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 与 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 也是正数(见第2.6节关于数学归纳法的注释)。

11．用公理Ⅰ和公理Ⅱ说明2/3是“正”数。

第二章　工　具

2.1　引言

在推导不等式时，最终要用到的基本假设是第一章的两条公理，还有实数系及其运算(例如分配律、数学归纳法等等)，以及由这些公理推出的几个简单定理。它们在不等式的理论和应用中频繁出现，对于数学家来说，犹如刀斧之于工匠，须臾不离其身。

这些定理(或运算法则)连同它们的证明都是富有吸引力的，也是颇有趣味的。数学家们常常从几个重要的基本概念和假设出发，建立起一个精致严密的体系。从这方面来说，这些定理也为我们提供了一个极好的例证。这里的证明通常很简短，但却是严谨的；而且只在很少几处才求助于机智，正是这种机智使数学成了迷人的学科。

本章将阐述并证明几个这样的定理。定理中出现的字母 a,b,c 等等，除有明确限制外，都代表任意实数。

为了方便起见，我们只就“$>$”的情形给出这些定理(或法则)。每个例子都有一个等价的“$<$”规则。例如，“$>$”的规则是可以传递的，即有“若$a>b$，$b>c$，则$a>c$。”相应的“$<$”规则就是“若$a<b$，$b<c$，则$a<c$。”

对于本章所给出的每一个“$>$”规则，大家可以类似地写出其伙伴规则即“$<$”规则。但是千万要小心，别掉到数学的陷阱中去！例如，“若$a>b$，且$c>0$，则$ac>bc$”的伙伴规则就应该是“若$a<b$，且$c>0$，则$ac<bc$。”也就是说，伙伴规则中仍要求$c>0$，而不是$c<0$。

我们把下面每个定理都分为两部分来叙述：第一部分论述严格不等式“>”，比较简单，但包括了结果的核心；第二部分论述混合不等式“≥”，并且有时是针对任意 n 个实数的情形给出的，因此叙述的是更为一般的结论。我们的证明通常只对第二部分给出，但是不难把它们的特殊情形应用到第一部分去。

本章所论述的这些定理，有时是明确的“>”规则，有时也包含着暗指的“<”规则。

2.2 传递性

定理2.1 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$。

一般地，若 $a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_3, \cdots, a_{n-1} \geq a_n$，则$a_1 \geq a_n$，当且仅当所有关系式都是等式时，有$a_1 = a_n$。

先举一个支出方面的例子。假如你在星期六化的钱比在任何一个工作日化的都多，而在星期日化的钱至少与在星期六化的一样多，那么可以断定你在星期日化的钱比在任何工作日化的都多。

再看第一章习题中第 1 题，解答是

$$-3<-2<-1.5<-1<3-\pi<0<\pi-3<\sqrt{2}<2<3;$$

此式只能狭隘地理解为：这 9 个数中的每一个都比它后面紧接着的那个数小，例如$-3<-2$，$-2<-1.5$等等。但是根据定理 2.1 便知，这些数中的每一个都比它的任何一个后续数小，例如$-3<-1.5$，$-1<2$，$3-\pi<\sqrt{2}$等等。

下面我们来证明定理 2.1。

证明 这里只对 4 个实数的情形给出证明。

假设$a_1 \geq a_2, a_2 \geq a_3, a_3 \geq a_4$。由不等式的代数定义，数 $a_1-a_2, a_2-a_3, a_3-a_4$ 或者在集合P内，或者在集合 O内。因

此由公理Ⅱ知它们的和

$$(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)=a_1-a_4$$

或者在集合P内，或者在集合O内；当且仅当$a_1-a_2=0$，$a_2-a_3=0$，$a_3-a_4=0$时，这个和才在集合O内。于是我们有$a_1\geqslant a_4$，当且仅当$a_1=a_2, a_2=a_3, a_3=a_4$时，等号成立。

对于一般情形的传递规则，读者不难用简单的数学归纳法(见第2.6节关于数学归纳法的注释)加以证明。

2.3　加法

定理2.2　若$a>b$，$c>d$，则$a+c>b+d$。若$a>b$，c是任意实数，则$a+c>b+c$。

一般地，若$a_1\geqslant b_1, a_2\geqslant b_2, \cdots, a_n\geqslant b_n$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n。\qquad (2.1)$$

当且仅当$a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$时，(2.1)式的等号成立。

例如，把不等式$1<\sqrt{2}$与$3<\pi$相加，便得到$1+3<\sqrt{2}+\pi$。再把后者与$-1=-1$相加，就有$3<\sqrt{2}+\pi-1$。这5个式子加在一起，又得出$10<3(\sqrt{2}+\pi)-2$。

证明　与定理2.1相同，本定理用归纳法来证明也是可行的。但是这里针对一般情形给出一个直接证明。

由假设，每个数$a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_n-b_n\in P$，或者$\in O$，因此由第一章习题中第10题(公理Ⅱ的推广)，和数

$$\begin{aligned}&(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)\\&\quad=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)\in P;\end{aligned}$$

当且仅当$a_1-b_1=0, a_2-b_2=0, \cdots, a_n-b_n=0$时，此和数$\in O$。于是有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant b_1+b_2+\cdots+b_n;$$

当且仅当$a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$时，等号成立。

2.4 与数的乘法

定理2.3 若$a>b$，$c>0$，则$ac>bc$。若$a>b$，$c<0$，则$ac<bc$。

一般地，若$a\geqslant b, c>0$，则$ac\geqslant bc$；当且仅当$a=b$时，$ac=bc$。若$a\geqslant b, c<0$，则$ac\leqslant bc$；当且仅当$a=b$时，$ac=bc$。

这就是说，不等式各项乘以一个正数时，不等号保持不变；乘以一个负数时，不等号要调换方向。特别说来，当$a\geqslant b, c=-1$时，有$-a\leqslant -b$。例如，用1和-1去乘不等式$3>2$时，就分别得到$3>2$及$-3<-2$。

证明 由$a\geqslant b$，知$a-b\in P$，或者$a-b\in O$。若$c\in P$，则由公理Ⅱ，$c(a-b)=ca-cb\in P$，或者$\in O$，即$ca\geqslant cb$。若$c\in N$，则由定理1.1，$c(a-b)\in N$，或者$\in O$，因此就有$-[c(a-b)]=cb-ca\in P$，或者$\in O$，于是$cb\geqslant ca$。

不论哪一种情况，当且仅当$a=b$时，等号成立。

2.5 减法

定理2.4 若$a>b$，$c>d$，则$a-d>b-c$。若$a>b$，c是任意实数，则$a-c>b-c$。

一般地，若$a\geqslant b$，$c\geqslant d$，则$a-d\geqslant b-c$，当且仅当$a=b$，$c=d$时，$a-d=b-c$。

请注意：这里是$a-d$及$b-c$，不是$a-c$，$b-d$。

例如，由不等式$7>6$及$5>3$，得到$7-3>6-5$，即$4>1$；而不等式$7-5>6-3$则是错误的。也可以用相应的“$<$”的术语来叙述减法规则：由不等式$-5<10$及$-4<-3$，

得到 $-5-(-3)<10-(-4)$，即 $-2<14$。

证明　在不等式 $c \geqslant d$ 两边同乘以 -1，由定理2.3得 $-c \leqslant -d$，即 $-d \geqslant -c$；当且仅当 $c=d$ 时，等号成立。再将不等式 $a \geqslant b$ 与 $-d \geqslant c$ 相加，由定理2.2得 $a+(-d) \geqslant b+(-c)$，即 $a-d \geqslant b-c$；当且仅当 $a=b, c=d$ 时，有 $a-d=b-c$。

习　题　一

1．证明：若 $a<b$，则 $a<(a+b)/2<b$。

2．证明：对所有 a,b,c,d，都有

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2) \leqslant (ac-bd)^2$$

以及

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2,$$

当且仅当　$ad=bc$ 时，等号成立。

3．证明：对所有 a,b，都有

$$(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2,$$

当且仅当　$a=b$ 时，等号成立。

4．用数学归纳法证明关于"$>$"的传递规则。

2.6　乘法

定理2.5　若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$。

一般地，若 $a_1 \geqslant b_1>0, a_2 \geqslant b_2>0, \cdots, a_n \geqslant b_n>0$，则

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geqslant b_1 b_2 \cdots b_n; \qquad (2.2)$$

当且仅当 $a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$ 时，(2.2)式的等号成立。

例如，从 $2>1$ 与 $4>3$，得到 $(2)(4)>(1)(3)$，或者 $8>3$。注意：由 $-1>-2$ 与 $-3>-4$ 却得到 $(-1)(-3)<$

$(-2)(-4)$；因此每个数都必须是正的，这个条件不能去掉。

证明 我们用数学归纳法给出证明。归纳法的标准程序由下面的步骤组成。为了证明一个命题对所有正整数 n 都成立，首先，对前一个或前两个正整数去检验；然后，假定这个命题对直到$k-1$为止的所有正整数都成立，再去证明命题对下一个正整数 k 也成立。既然 k 可以是任何>1 的整数(特别地，令$k-1=1$或 2，对它们来说，本命题是已被证实了的)，于是可以断定，这个命题对一切正整数都是正确的。

对于$n=1$，定理2.5 的结论 $a_1 \geqslant b_1$ 是定理假设的简单重复.这一点对于数学归纳法证明中的第一步已经足够了,但是我们还要对$n=2$给出证明；就是说，我们要证明：若 $a_1 \geqslant b_1 > 0$，$a_2 \geqslant b_2 > 0$，则$a_1 a_2 \geqslant b_1 b_2$。

根据不等式乘以一个正数的法则，可以推出

$$a_1 a_2 \geqslant b_1 a_2; \tag{2.3}$$

当且仅当$a_1=b_1$时，等号成立。根据同样的规则，有不等式

$$b_1 a_2 \geqslant b_1 b_2; \tag{2.4}$$

当且仅当$a_2=b_2$时,等号成立。再根据传递性规则(定理2.1)，从(2.3)和(2.4)便得到所要的不等式

$$a_1 a_2 \geqslant b_1 b_2; \tag{2.5}$$

当且仅当$a_1=b_1$和$a_2=b_2$时，等号成立。

我们已经证明了不等式(2.2)对$n=1$和$n=2$成立。

假定不等式(2.2)对$n=1,2,\cdots,k-1$，也就是对 $k-1$ 个数的乘积是正确的：

$$a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \geqslant b_1 b_2 \cdots b_{k-1}; \tag{2.6}$$

当且仅当$a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_{k-1}=b_{k-1}$时，等号成立。再根

据乘以一个正数的乘法法则(定理2.3)，当我们用 a_k 去乘不等式(2.6)时，便得到

$$(a_1a_2\cdots a_{k-1})a_k\geqslant(b_1b_2\cdots b_{k-1})a_k; \qquad (2.7)$$

当且仅当$a_1a_2\cdots a_{k-1}=b_1b_2\cdots b_{k-1}$时，等号成立。由同样的规则，当我们用$b_1b_2\cdots b_{k-1}$去乘不等式

$$a_k\geqslant b_k$$

时，又得到

$$(b_1b_2\cdots b_{k-1})a_k\geqslant(b_1b_2\cdots b_{k-1})b_k; \qquad (2.8)$$

当且仅当$a_k=b_k$时，等号成立。再根据传递性规则，从(2.7)和(2.8)便得出

$$a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k\geqslant b_1b_2\cdots b_{k-1}b_k;$$

当且仅当$a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_k=b_k$时，等号成立。

2.7 除法

定理2.6 若$a>b>0$，$c>d>0$，则$a/d>b/c$。特别地，对于$a=b=1$，若$c>d>0$，则$1/d>1/c$。

一般地，若$a\geqslant b>0$，$c\geqslant d>0$，则$a/d\geqslant b/c$；当且仅当$a=b$，$c=d$时，$a/d=b/c$。

请注意：这里是a/d，b/c，不是a/c，b/d。

例如，由不等式$7>6$及$5>3$，得到$7/3>6/5$；而不等式$7/5>6/3$则是错误的。

由$7>6$，$5>3$，还能得出$1/6>1/7$及$1/3>1/5$。

证明 我们有

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{c}=\frac{ac-bd}{cd}.$$

因为$c\in P, d\in P$，所以由公理Ⅱ，分母$cd\in P$。又因为$a\geqslant b$，

$c \geqslant d$，所以从定理2.5得到$ac \geqslant bd$，因此分子$ac-bd \in P$或者$\in O$，实际上$ac-bd \in P$，除非$a=b$并且$c=d$。根据定理1.1，一个负数和一个正数的乘积是负的，而乘积

$$cd\left(\frac{ac-bd}{cd}\right)$$

等于非负数，且cd是正的，因此

$$\frac{ac-bd}{cd}=\frac{a}{d}-\frac{b}{c}$$

是非负的。从而$a/d \geqslant b/c$，当且仅当$a=b, c=d$时，$a/d=b/c$。

习 题 二

1. 由不等式

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geqslant 0,$$

证明

$$\frac{2}{(1/a)+(1/b)} \leqslant \sqrt{ab}$$

对一切正数a, b都对。在什么情况下等号成立？

2. 证明：一个正数和它的倒数之和至少等于2；即证明：对所有正值a，有

$$a+\frac{1}{a} \geqslant 2.$$

对a的什么值等号成立？

3. 证明：对所有a, b, c有

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

4. 证明：对一切a, b有

$$(a^2-b^2)(a^4-b^4)\leqslant(a^3-b^3)^2$$

和

$$(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2.$$

5． 证明

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2\geqslant 6abc$$

对所有非负数a,b,c成立。

6． 证明：

$$(a^2-b^2)^2\geqslant(a-b)^4$$

对一切满足$ab\geqslant 0$的a,b都成立，并且

$$(a^2-b^2)^2\leqslant(a-b)^4$$

对一切满足$ab\leqslant 0$的a,b都成立。

7． 证明：对一切满足$a+b\geqslant 0$的a,b有

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2.$$

8． 试对上述第 3 题到第 7 题的任何一题，确定在什么情况下等号成立。

2.8 乘幂与方根

定理2.7 若$a>b>0$，m,n是正整数，且$a^{1/n}$与$b^{1/n}$表示正的n次方根，则

$$a^{m/n}>b^{m/n} \quad 且 \quad b^{-m/n}>a^{-m/n}.$$

一般地，若$a\geqslant b>0$，m是非负整数，n是正整数，又$a^{1/n}$与$b^{1/n}$表示正的n次方根，则

$$a^{m/n}\geqslant b^{m/n} \quad 且 \quad b^{-m/n}\geqslant a^{-m/n}; \qquad (2.9)$$

当且仅当(I) $a=b$时，或者(II) $m=0$时，有 $a^{m/n}=b^{m/n}$ 且 $b^{-m/n}=a^{-m/n}$。

对于$a=9$，$b=4$，表2给出了$a^{m/n},b^{m/n},b^{-m/n},a^{-m/n}$的某些值。对于正的$m/n$，有$9^{m/n}>4^{m/n}$，但是$4^{-m/n}>9^{-m/n}$。

表2　数的乘幂的实例

$\frac{m}{n}$	$9^{m/n}$	$4^{m/n}$	$4^{-m/n}$	$9^{-m/n}$
0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{3}{2}$	27	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
2	81	16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$

证明　若 $m=0$，则 $a^{m/n}=b^{m/n}=b^{-m/n}=a^{-m/n}=1$，此时（2.9）式的等号成立。

若 $m\neq0$，则根据不等式的乘法规则（定理2.5），$a^m\geqslant b^m$；当且仅当 $a=b$ 时，等号成立。又若 $a^{1/n}<b^{1/n}$ 成立，则 $(a^{1/n})^n<(b^{1/n})^n$ 即 $a<b$ 也成立，但这是不可能的，因已知 $a\geqslant b$，从而 $a^{1/n}\geqslant b^{1/n}$。因此 $a^{m/n}\geqslant b^{m/n}$，当且仅当 $a=b$ 时，$a^{m/n}=b^{m/n}$。

对于负指数，令

$$a^{m/n}=c,\qquad b^{m/n}=d,$$

则

$$a^{-m/n}=\frac{1}{c},\qquad b^{-m/n}=\frac{1}{d}.$$

既然我们已经证明了 $c\geqslant d$，那么从定理2.6就得到

$$\frac{1}{d}\geqslant\frac{1}{c},$$

即

$$b^{-m/n} \geqslant a^{-m/n},$$

当且仅当 $c=d$ 即 $a=b$ 时，等号成立。

这个规则可以被推广到正、负无理数幂的情况。

习 题 三

1． 证明：对一切 a，b 有

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}.$$

在什么情况下，等号成立？

2． 证明：若 a,b,c,d 是正数(并且 c 和 d 是有理数)，则

$$(a^c-b^c)(a^d-b^d) \geqslant 0,$$

且

$$a^{c+d}+b^{c+d} \geqslant a^c b^d + a^d b^c.$$

在什么情况下，等号成立？

3． 当 $c=d=1$ 时，第 2 题中第二个不等式简化成什么？当 $c=d=1/2$ 呢？

4． 对于 $bd>0$，证明：当且仅当 $ad \leqslant bc$ 时，$a/b \leqslant c/d$，并且这里每一处的等号当且仅当另一处的等号成立时才成立。

5． 证明：若 $a/b \leqslant c/d$，则

$$\frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d},$$

当且仅当 $ad=bc$ 时等号成立。

6． 证明：若 $a/b \leqslant c/d$，a,b,c,d 是正数，则

$$\frac{a}{a+b} \leqslant \frac{c}{c+d},$$

当且仅当$ad=bc$时，等号成立。

7. 证明：若$a/b\leqslant c/d$，b，d是正数，则

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d},$$

当且仅当$ad=bc$时，等号成立。

8. 用第4题给出的判别法，对$a=2$，$b=3$，$c=5$，$d=6$，核实第5，6，7题结论中的4个不等式。

9. 对于传递性、加法、与一个数的乘法、减法、乘法、除法以及乘幂与方根，写出与“$>$”的不等式规则等价的“$<$”规则。

第三章　绝　对　值

3.1　引言

在第一章里，我们根据正数集合P定义了不等式$a>b$。第二章的好几个结果(例如关系到不等式乘法的定理2.5)也都要求其中某些数必须是正数。此外，定理2.7中的数如果是负的，那么其分数次幂甚至可能不是实数，例如当$a=-9$时，$a^{1/2}$就是这种情形。然而第四章将要导出的许多基本不等式却恰恰含有分数次幂。因此很自然地，我们常常只限于讨论正数或者非负数(正数及零)。

在不等式的应用问题中，经常涉及到重量、体积等等，也涉及到某些数学对象(例如实数、复数、向量)的大小或者绝对值。它们都是通过非负数来度量的。

为了将不等式应用到以后各章中去，本章要定义实数的绝对值，并讨论它的某些性质。下面还将给出一些带绝对值的函数图形，这些函数虽不常见却很有趣。怎样看待它们，我们将提出一些新的思想。

3.2　定义

实数a的绝对值记作$|a|$，我们可以用种种等价的方式来定义它。这里考虑以下几种定义。

定义　设a为实数。若a为非负数，则a的绝对值$|a|$定义为a；若a为负数，则$|a|$定义为$-a$。

因此，$|2|=2,|0|=0$，而$|-2|=-(-2)=2$。

这个定义的主要缺点是不适合作代数运算。例如(见本

章后面的定理3.2)对一切a,b，有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

大家可以对$a>0,b>0$；$a>0,b<0$(或$a<0,b>0$)；$a<0,b<0$；$a=0,b>0$(或$a>0,b=0$)；$a=0,b<0$(或$a<0,b=0$)；$a=0,b=0$等各种情况，分别加以检验。但是这样做很繁琐，最好能通过标准的代数程序，给出一个统一的证明。这件事准备放在第3.8节去做，在那里，我们首先根据平方及平方根给绝对值下了一个等价的定义。

本节开头的定义可以重述如下：

若实数$a\in O$，则其绝对值$|a|$是0；若$a\in P$或$a\in N$，则$|a|$是集合$\{a,-a\}$中取正值的那个数。

例如，若$a=2$，则$|a|$是$\{2,-2\}$中的正数，即2；若$a=-2$，则$|a|$是$\{-2,-(-2)\}$中的正数，即2。

绝对值$|a|$的这种刻划与上面的定义一样，不适合作代数运算。

3.3 特殊的记号

下面介绍的关于$|a|$的刻划要用到两个很有用的特殊记号：$\max\{\ \}$及$\{\ \}^+$。我们先给出它们的定义。

设$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为任意的实数集合，则记号

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

表示该集合的最大数。

如果集合只有一个或两个元素，那么我们仍使用“最大数”这个词；如果最大值同时在好几个元素上取到，那么这几个数的任何一个都是最大数。因此，

$$\max\{3,7,0,-2,5\}=7,$$

$$\max\{4,4\}=4,\qquad \max\{-3,-1\}=-1.$$

在带有记号 max{ }的表达式之间可以进行算术运算(尽管有某些困难)；例如

$$\frac{(\max\{4,-3\})(\max\{0,5\})+\max\{-4,4\}-\max\{-9,-8\}}{2\max\{1,4\}}=4.$$

特别地，可考虑$\max\{a,-a\}$；若 $a=2$，则

$$\max\{a,-a\}=\max\{2,-2\}=2=|a|;$$

若 $a=-3$，则

$$\max\{a,-a\}=\max\{-3,-(-3)\}=3=|a|;$$

若 $a=0$，则

$$\max\{a,-a\}=\max\{0,0\}=0=|a|;$$

等等。于是对任何实数 a，有

$$\max\{a,-a\}=|a|. \tag{3.1}$$

(3.1)式给出了绝对值$|a|$的另一个刻划。

现在来考虑第二个特殊记号。

若集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$至少有一个非负数，则记号

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^+$$

表示该集合的最大数；若此集合的所有元素都是负数，则这个记号表示 0 。因此

$$\{3,7,0,-2,5\}^+=7,$$
$$\{4,4\}^+=4,\quad \{-3,-1\}^+=0.$$

与 max{ }的情况相同，对含有记号{ }$^+$的表达式施行算术运算是困难的，但也是可能的；例如

$$\frac{(\{4,-3\}^+)(\{0,5\}^+)+\{-4,4\}^+-\{-9,-8\}^+}{2\{1,4\}^+}=3.$$

以上两例表明，记号 max{ }与{ }$^+$不一样；事实上，从定义容易看出

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^+=\max\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$
$$=\max\{0,\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\}.$$

从而

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^+\geqslant\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

当且仅当集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$至少有一个非负数时，这里的等号成立。

因为对于任何实数 a，集合$\{a,-a\}$至少有一个非负数，所以

$$\{a,-a\}^+=\max\{a,-a\}=|a|.$$

这样我们便得到了绝对值$|a|$的又一种定义：

$$\{a,-a\}^+=|a|.$$

习 题 一

1. 确定下列各值：

(a) $\max\{-7,-4,-1\}$； (b) $\max\{3,\pi,\sqrt{2}\}$；

(c) $\max\{-7,0,-1\}$； (d) $\max\{0,4,1\}$；

(e) $\max\{3,-3,3\}$； (f) $\{-7,-4,-1\}^+$；

(g) $\{3,\pi,\sqrt{2}\}^+$； (h) $\{-7,0,-1\}^+$；

(i) $\{0,4,1\}^+$； (j) $\{3,-3,3\}^+$.

2. 对于任意实数集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，记号$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的最小数，记号$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^-$表示集合$\{0,a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的最小数。试确定下列各值：

(a) $\min\{-7,-4,-1\}$； (b) $\min\{3,\pi,\sqrt{2}\}$；

(c) $\min\{-7,0,-1\}$； (d) $\min\{0,4,1\}$；

(e) $\min\{3,-3,3\}$； (f) $\{-7,-4,-1\}^-$；

(g) $\{3,\pi,\sqrt{2}\}^-$； (h) $\{-7,0,-1\}^-$；

(i) $\{0,4,1\}^-$； (j) $\{3,-3,3\}^-$.

3. 确定

$$(\max\{-1,-2\})(\{-1,-2\}^{+})-(\min\{1,2\})(\{1,2\}^{-})$$

的值。

4. 证明

$$\max\{\max\{a,b,c\},\max\{d,e\}\}=\max\{a,b,c,d,e\}.$$

5. 举例说明不等式

$$\max\{a,b\}+\max\{c,d\}\geqslant\max\{a,b,c,d\}$$

并非永远正确。

6. 证明

$$\{a,b\}^{+}+\{c,d\}^{+}\geqslant\{a,b,c,d\}^{+}.$$

7. 证明

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^{+}\geqslant\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

$$\geqslant\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geqslant\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}^{-}.$$

使上面三个严格不等号都成立的集合存在吗?

8. 证明：若 $a=\max\{a,b,c\}$，则

$$-a=\min\{-a,-b,-c\}.$$

9. 证明：$\{-a,-b\}^{-}=-\{a,b\}^{+}$.

10. 证明：

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\max\{a_1,\max\{a_2,a_3,\cdots,a_n\}\}.$$

3.4 图象的考察

我们研究函数时，经常采用图示法，因为一张图可以使我们对函数的全面性态一目了然，相反，假如没有图，有些性质就可能模糊不清。无论是讨论平均日温、股票涨落，还是讨论绝对值 $|x|$，以及诸如此类，图象都是醒目而生动的。

例如，考察图3.1及图3.2所表示的函数

$$y=\max\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}\right\}$$

及

$$y=\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\quad -\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}\right\}^{+}$$

的图象，就可以使记号max{ }和{ }⁺的含义更加清楚。在这两个图中，函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad 及\quad y=-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$$

的图形是由实线及在该方向的虚线延长线所组成的。

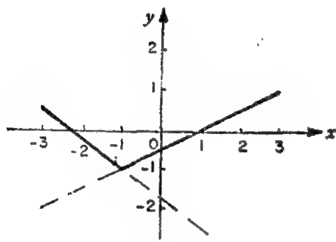


图 3.1

$y=\max\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}\right\}$，$-3\leqslant x\leqslant 3$的图形

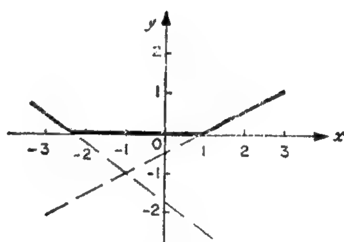


图 3.2

$y=\left\{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\right\}^{+}$，$-3\leqslant x\leqslant 3$的图形

为了从直观上刻划绝对值，我们来作函数 $y=|x|$ 的图形。下面只画出了对应于区间 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 的那一部分，这对我们的讨论没有影响。

在作图时，我们先考虑函数 $y'=x$ 的图形，即满足方程 $y'=x$ 的有序实数对 (x,y') 的集合的图象(图3.3)，再考虑函

数 $y'' = -x$ 的图形(图3.4)。

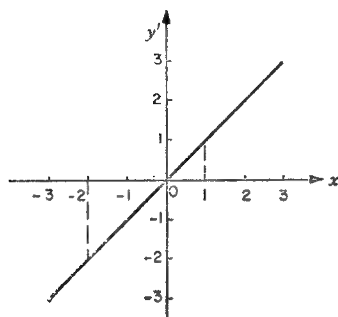


图 3.3

$y' = x, -3 \leqslant x \leqslant 3$ 的图形

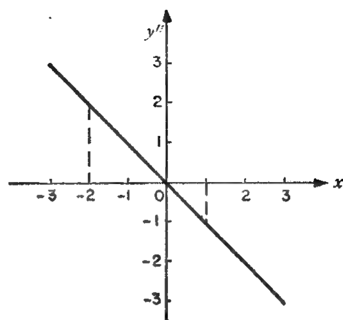


图 3.4

$y'' = -x, -3 \leqslant x \leqslant 3$ 的图形

由于

$$|x| = \max\{x, -x\} = \max\{y', y''\},$$

因此 $y = |x|$ 的图形就是 $y = \max\{y', y''\}$ 的图形，也就是说，对于每个横坐标 x，将纵坐标 y' 与 y'' 的较大者从图 3.3 与图 3.4 中挑选出来，就是图 3.5 的纵坐标 y。例如当 $x = -2$ 时，较大的纵坐标是 $y'' = 2$；当 $x = 1$ 时，较大的纵坐标是 $y' = 1$ 等等。$y = |x|$ 的图形见图3.5。

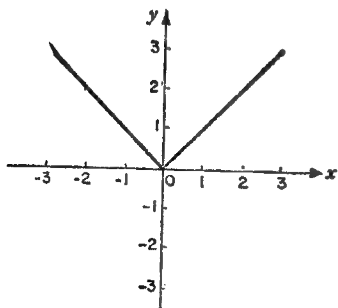


图 3.5

$y = |x|, -3 \leqslant x \leqslant 3$ 的图形

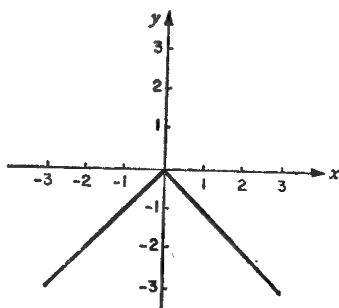


图 3.6

$y = -|x|, -3 \leqslant x \leqslant 3$ 的图形

图3.6表示 $y=-|x|$ 的图形。

比较图3.3与3.6，我们发现：$y=x$ 的图形的左半支与 $y=-|x|$ 的左半支重合，而右半支在 $y=-|x|$ 的右半支的上方，因此总起来说有 $x\geqslant-|x|$；再比较图3.3与3.5，我们又发现：$y=x$ 的图形的右半支与 $y=|x|$ 的右半支重合，而左半支在 $y=|x|$ 的左半支的下方，因此总地有 $x\leqslant|x|$。这样一来，通过对图3.3，3.5及3.6的考察，我们便看出了下面的结果（当然，不考虑这些图，大家可能也会发现它）：

定理3.1 对于每个实数 a，有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$

当且仅当 $a\leqslant0$ 时，左边的等号成立；当且仅当 $a\geqslant0$ 时，右边的等号成立。

定理3.1可由以下两个事实推出：(1) 若 $a\in N$ 或 $a\in O$，则 $a=-|a|$；若 $a\in P$ 或 $a\in O$，则 $a=|a|$；(2) 任何正数大于任何负数（见第一章习题第8题）。

作为练习，我们来考虑比较复杂的带绝对值的函数图形。

先看函数

$$y=\frac{1}{2}(x+|x|)$$

的图形。当 $x\geqslant0$，则 $|x|=x$，因此

$$y=\frac{1}{2}(x+x)=x;$$

当 $x<0$，则 $|x|=-x$，因此

$$y=\frac{1}{2}(x-x)=0.$$

对于每个横坐标 x，取图3.3及图 3.5 的纵坐标 y' 与 y 的平均数作为纵坐标，便得到图3.7。

容易了解，图3.7也是 $y=\max\{0,x\}$ 的图形，同样，也是 $y=\{x\}^+$ 的图形。因此对一切 x，有

$$\{x\}^+=\max\{0,x\}=\frac{1}{2}(x+|x|).$$

我们再来看

$$y=2|x+1|+|x|+|x-1|-3 \qquad (3.2)$$

在区间 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的图形。当 $x\geqslant 1$，则(3.2)式右边的各项可以写成

$$2|x+1|=2x+2, \quad |x|=x,$$
$$|x-1|=x-1, \quad -3=-3,$$

因此

$$y=2x+2+x+x-1-3=4x-2.$$

对于 $0<x<1$，(3.2)式右边的头两项可以象前面那样写，但是第三项

$$|x-1|=1-x, \quad \text{不是} \quad |x-1|=x-1.$$

(你能说明为什么吗？)因此，对于 $0<x<1$，

$$y=2x+2+x+1-x-3=2x.$$

同样地，对于 $-1\leqslant x\leqslant 0$，

$$y=2x+2-x+1-x-3=0;$$

对于 $x<-1$，

$$y=-2x-2-x+1-x-3=-4x-4.$$

这就是说，方程 (3.2) 在每一部分区间上等价于一个不同的线性方程。分别画出每一部分的相应线段，便得到图 3.8 所示的连续图形。

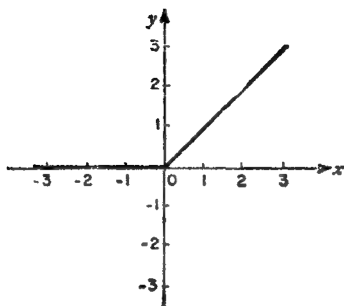


图 3.7

$y=\frac{1}{2}(x+|x|),-3\leqslant x\leqslant 3$ 的图形

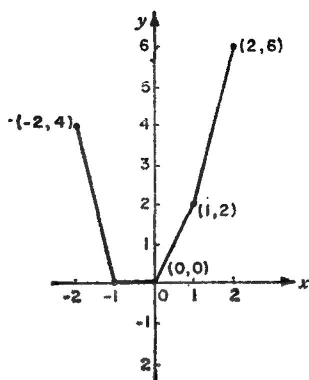


图 3.8

$y=2|x+1|+|x|+|x-1|-3$，$-2\leqslant x\leqslant 2$ 的图形

习 题 二

1. 对于 $-a$，试从图 3.4,3.5,3.6 得出类似于关于 a 的定理3.1的结果。

2. 对于 $-3\leqslant x\leqslant 3$，画出

(a) $y=\frac{1}{2}(x-|x|)$；　(b) $y=\frac{1}{2}(|x|-x)$；

(c) $y=-\frac{1}{2}(x+|x|)$

的图形。

3. 试确定第 2 题中哪些图形是下列图形之一：

(d) $y=\min\{0,x\}$；　(e) $y=\max\{0,-x\}$；

(f) $y=\min\{0,-x\}$；　(g) $y=\{x\}^-$；

(h) $y=\{-x\}^+$；　(i) $y=\{-x\}^-$。

4. 对于$-3\leqslant x\leqslant 3$，画出

(a) $y=\max\{x,-x-2\}$； (b) $y=\min\{x,-x-2\}$；

(c) $y=\{x,-x-2\}^{+}$； (d) $y=\{x,-x-2\}^{-}$

的图形。

5. 对于$-3\leqslant x\leqslant 3$，画出

$$y=2|x-1|-|x|+2|x+1|-5$$

的图形。

6. 由方程$y=f(x)$所定义的函数称为偶函数，如果对一切x，有$f(-x)=f(x)$；称为奇函数，如果对一切x，有$f(-x)=-f(x)$。例如由$y=x^2$所定义的函数是偶函数，因为$(-x)^2=x^2$；而由$y=x^3$所定义的函数是奇函数，因为$(-x)^3=-x^3$；当然，有些函数既不是偶函数，也不是奇函数。在从图3.3到3.6所示的函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数？

3.5 "符号"函数

另一个与$|x|$紧密相联的函数是图3.9所表示的函数，这就是由$y=\operatorname{sgn}x$(读作"x的符号"，不要与$\sin x$相混淆)所表示而由等式

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}\qquad(3.3)$$

所定义的函数。

在图3.9中，相应于(0,1)和(0,-1)的点是没有阴影的空圆圈，强调这两个点不包括在图里；相应于(0,0)的点被一个有阴影的圆所覆盖，强调这个点是包括在这个图里的。

函数$y=\operatorname{sgn}x$通过如下定义的斜率概念与$y=|x|$发生联

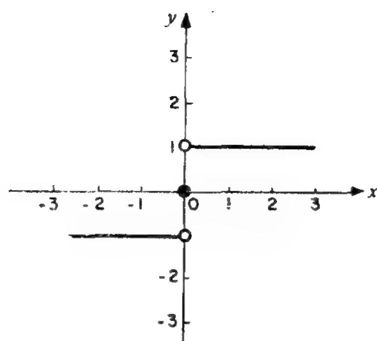


图3.9　$y=\operatorname{sgn}x$，$-3\leqslant x\leqslant 3$的图形

系：

设L是坐标平面内一条不垂直于x轴的直线，$P_1(x_1,y_1)$与$P_2(x_2,y_2)$是L上两个不同的点；见图3.10和3.11。从P_1走到P_2的垂直升高是有向距离y_2-y_1，水平进程是有向距离$x_2-x_1\neq 0$。当然，这里的"升高"或者"进程"都可能是负的；例如在图3.11中，升高y_2-y_1就是负的(实际上是一个"降落")。升高与进程的比，对于直线L上所有不同的点P_1,P_2来说有相同的值，我们定义它为L的斜率m：

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

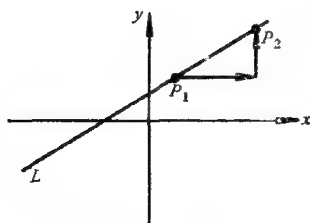


图3.10　有正斜率的直线

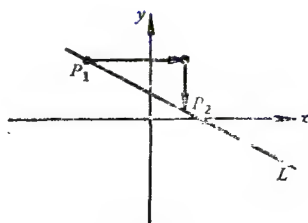


图3.11　有负斜率的直线

容易验证直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 的斜率分别是 1 和 -1，见图3.3与3.4。

现在考虑图3.5所示的 $y=|x|$ 的斜率；请记住图3.9所示的 $y=\operatorname{sgn}x$ 的纵坐标。

对于 $x>0$，$y=|x|$ 的图形与 $y=x$ 的图形重合，因而有斜率 $m=1$。对于 $x>0$，$y=\operatorname{sgn}x$ 的图形有纵坐标 $y=1$。

对于 $x<0$，$y=|x|$ 的图形与 $y=-x$ 的图形重合，因而有斜率 $m=-1$。又对于 $x<0$，$y=\operatorname{sgn}x$ 的图形有纵坐标 $y=-1$。

对于 $x=0$，$y=|x|$ 的图形的斜率没有定义，但是可以说在点$(0,0)$处的右斜率是 1，左斜率是 -1。这两个斜率的平均数是 $[1+(-1)]/2=0$。又，对于 $x=0$，$y=\operatorname{sgn}x$ 的图形有纵坐标 $y=0$。

因此 $y=|x|$ 与 $y=\operatorname{sgn}x$ 在几何上有如下联系：对于 $x\neq 0$，$y=\operatorname{sgn}x$ 的值等于 $y=|x|$ 的斜率的值；对于 $x=0$，$y=\operatorname{sgn}x$ 的值等于上述右斜率与左斜率的平均数。

虽然函数 $y=|x|$ 与 $y=\operatorname{sgn}x$ 相对说来比较简单，但是它们的图形却有点特别：$y=|x|$ 的图形没有连续的斜率；$y=\operatorname{sgn}x$ 的图形甚至更怪，它本身就是不连续的。这里我们不想去定义连续性与不连续性，但是在这两个例子中，它们的直观含义应该是清楚的。

函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 与 $y=|x|$ 除了有上述几何上的联系外，还有一种对我们很有启发的联系。稍微一想便知：对于任何实数 a，有

$$a\operatorname{sgn}a=|a|;$$

因此，这个等式又给出了绝对值 $|a|$ 的一个刻划。

习 题 三

1． 对于$-3\leqslant x\leqslant 3$，画出通过点(0,0)且斜率为

(a) $m=0$；　　(b) $m=\frac{2}{3}$；　　(c) $m=-1$

的直线。

2． 试作出

(a) $y=x$；　　(b) $y=x+1$；　　(c) $y=x+2$；

(d) $y=x+3$；　　(e) $y=x-1$；　　(f) $y=x-2$

位于正方形$-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$中的那部分图形。要画(d)的相应部分是不可能的，为什么？

3． 对于$-3\leqslant x\leqslant 3$，作出

(a) $y=(x+1)\operatorname{sgn}x$；　　(b) $y=x\operatorname{sgn}(x+1)$

的图形。

4． 对于$-3<x<3$，作出(x,y)的图形，要求对于每个x，相应的y值是图3.6中图形的斜率；对于每个没有定义斜率的x，用右斜率和左斜率的平均数作为y。

3.6 不等式的图形

下面我们利用图形的直观性来研究几个带绝对值的不等式。

先考虑等式$|x|=1$和不等式$|x|\leqslant 1$。该等式恰有两个解，即

$$x=1 \quad 和 \quad x=-1;$$

而不等式的解是整个区间$-1\leqslant x\leqslant 1$。又，等式$|x-1|=2$恰有两个解

$$x=-1 \quad 和 \quad x=3;$$

而不等式$|x-1|\leqslant 2$的解是满足$-1\leqslant x\leqslant 3$的每一个x值。见

图3.12。

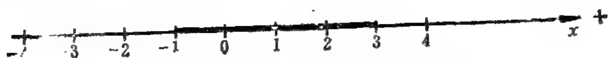


图3.12 不等式$|x-1|\leqslant 2$的图形

为了求解不等式

$$|x|+|y|\leqslant 1, \qquad (3.4)$$

我们分别考虑在Oxy平面上每一象限的情况。在第一象限，

$$x\geqslant 0, \qquad y\geqslant 0,$$

不等式(3.4)等价于

$$x+y\leqslant 1.$$

先画出直线$x+y=1$即直线$y=1-x$位于第一象限的那部分；既然要求的是

$$y\leqslant 1-x$$

的解，因此图形是由第一象限中那些或者在这条直线上面或者在这条直线下方的点所组成的。

这部分图形由图3.13表示，而图3.14是不等式(3.4)的整个图形。

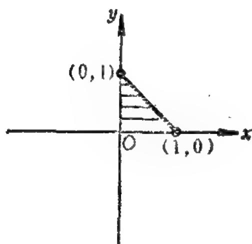


图 3.13

$|x|+|y|\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$的图形

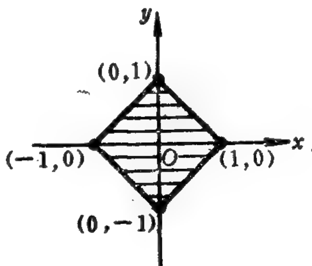


图 3.14

$|x|+|y|\leqslant 1$的图形

还可以认为图3.13是下列不等式集合

$$x+y\leqslant 1,\qquad x\geqslant 0,\qquad y\geqslant 0 \tag{3.5}$$

的解的图形。

在图3.15中，(a),(b),(c)的阴影区域分别由(3.5)的第一，第二和第三个不等式的解所组成；(d)中的三重阴影区域是全体不等式(3.5)的公共解。因此，虽然等式集合

$$x+y=1,\qquad x=0,\qquad y=0$$

沒有一对(x,y)值能够满足，但是不等式集合(3.5)却有整整一个解的区域。

类似地，等式$|x|=1$只有两个解，而不等式$|x|\leqslant 1$却有整整一个解的区间。因此，一个不等式的全部解的集合(或不等式的集合)往往比与它相应的等式的全部解的集合(或等式的集合)“丰富”得多。

习　题　四

1． 在图3.15(d)中，平面被分成7个不同的阴影部分。每一部分连同它的边界都构成某三个不等式集合的解；例如有一个集合是$x\leqslant 0, y\geqslant 0, x+y\geqslant 1$。试对每一部分区域给出相应的不等式集合。

2． 画出

(a) $|x|-|y|\geqslant 1$，对于$-2\leqslant x\leqslant 2$；

(b) $|x|+2|y|\leqslant 1$

的图形。

3． 画出不等式组：$y\leqslant x+3, -2\leqslant x\leqslant 2, y\geqslant 0$的图形。

4． 画出不等式组：$2x+y\leqslant 5$，$x-y\leqslant 1$，$x+2y\leqslant 7$的图形。

5． 画出不等式组：$2x+y\geqslant 5$，$x-y\geqslant 1$，$x+2y\geqslant 7$的图形。

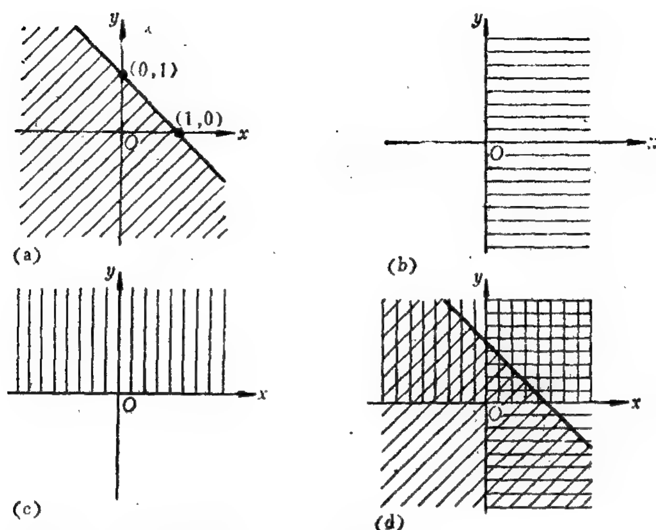


图3.15 (a) $x+y\leqslant 1$, (b) $x\geqslant 0$, (c) $y\geqslant 0$的不完全的图形；
(d) 是(a),(b)和(c)的相交部分的三重阴影区域的图形

3.7 代数的刻划

初看上去，把$|a|$的下一个也是最后一个刻划作为一种定义似乎是最不合乎需要的，因为它迂回而又不自然；但是，它的好处是在代数上最易于处理，因此它是我们以后最常用的一个定义。

我们考虑下面的事实：若$a=-2$，则

$$a^2=(-2)^2=4,\quad \sqrt{4}=2=|a|,\quad \text{因此}\quad \sqrt{a^2}=|a|;$$

若$a=0$，则

$$a^2=0^2=0,\quad \sqrt{0}=0=|a|,\quad \text{因此}\quad \sqrt{a^2}=|a|;$$

若$a=2$，则

$$a^2=2^2=4,\quad \sqrt{4}=2=|a|,\quad \text{因此}\quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

类似地，对于一切实数 a，有

$$\sqrt{a^2}=|a|,$$

这就是$|a|$的代数的刻划。

等式$|a|=\sqrt{a^2}$实际上表达了毕达哥拉斯(Pythagorean)关系式(直角三角形斜边长度 c 与两条直角边长度 a，b 之间的一个关系式)

$$c=\sqrt{a^2+b^2}$$

在 $b=0$ 时的特殊情形。因此实数 a 的绝对值可以解释为数轴上从原点到 a 点的线段长度或大小(图1.1)。进一步学习数学的读者很快就会知道，绝对值的这最后一个刻划(以及与之相伴随的长度的几何概念)可以适当地推广，因此，对于其它数学对象例如向量和复数也都可以定义绝对值。

在$|a|$的上述代数表达式中，需要注意两点：第一，a^2是非负的，所以它的平方根是实数；第二，由定义，记号$\sqrt{\ }$表示非负平方根。我们知道，$(\pm 2)^2=4$，因此 4 有两个平方根，即± 2；但是在代数运算里，记号$\sqrt{4}$只表示 2，不表示 -2。例如，考虑等式

$$5+\sqrt{4}=7, \quad 5-\sqrt{4}=3$$

和

$$5-\sqrt{4}=7, \quad 5+\sqrt{4}=3.$$

我们认为前两个等式是对的，后两个是不对的，因为记号$\sqrt{\ }$总意味着非负平方根。也正是由于这个原因，在我们所熟悉的二次方程

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0$$

的求解公式中，记号$\sqrt{\ }$之前要出现$\pm$号，即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

习 题 五

1. 从毕达哥拉斯关系式大家可以看出，满足方程

$$x^2+y^2=r^2$$

的解——点(x,y)的集合（轨迹）构成以原点为圆心，r为半径的圆周。试确定满足不等式

$$x^2+y^2\leqslant 25$$

的解——点(x,y)的集合。

2. 复数$x+iy$的绝对值定义为

$$|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

用平面内坐标为(x,y)的点来表示$x+iy$，试确定满足

$$1\leqslant|x+iy|\leqslant 2$$

的解的集合。

3. 确定满足

$$|x+iy+1|=|x+iy-1|$$

的点$x+iy$的轨迹。

3.8 “三角形”不等式

早在本章第3.2节我们就提到了下面定理3.2的不等式(3.6)。由于几何上的原因，它通常称为“三角形”不等式，这些原因我们将在第四章中进一步去讨论。下面是关于这个不等式的完整的命题：

定理3.2 对于任意实数a与b，有

$$|a|+|b|\geqslant|a+b|; \qquad (3.6)$$

当且仅当 $ab \geqslant 0$，也就是当且仅当 a 与 b 或者都 $\geqslant 0$ 或者都 $\leqslant 0$ 时，等号成立。

例如，若 $a=5$，$b=-2$，则

$$|a+b|=|5+(-2)|=3,$$

而

$$|a|+|b|=|5|+|-2|=7.$$

但是，若 $a=-5$，$b=-2$，则

$$|a+b|=|(-5)+(-2)|=7,$$

而

$$|a|+|b|=|-5|+|-2|=7.$$

我们可以对不等式(3.6)给出一个通俗、直观的解释：若 a 与 b 符号相反，则在不等式右边，a 与 b“互相抵消”，因此它们联合的力量遭到了削减；但是在不等式左边，a 与 b 却一直是“齐心协力”的。

可以同样地来理解不等式

$$|a-b| \geqslant ||a|-|b||, \tag{3.7}$$

当且仅当 $ab \geqslant 0$(即 a 与 b 或者都 $\geqslant 0$ 或者都 $\leqslant 0$)时，等号成立。此处，在不等式右边，a 与 b 总是“结算差额”；相反，在不等式左边，当 a 与 b 符号相反时，这两个数却齐心协力地增大了联合的力量。

现在我们利用绝对值的代数定义 $|a|=\sqrt{a^2}$ 来证明不等式(3.6)与(3.7)。

事实上，不等式(3.6)等价于

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2}. \tag{3.8}$$

而(3.8)又等价于

$$(\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2})^2 \geqslant (a+b)^2, \tag{3.9}$$

这是因为在(3.8)两边取平方便得到(3.9)(见定理2.5)；在(3.9)两边取非负平方根又得到(3.8)(见定理2.7)。

显然(3.9)可改写为

$$a^2+2\sqrt{a^2b^2}+b^2\geqslant a^2+2ab+b^2.$$

再根据不等式的加法、减法以及与正数的乘法规则，(3.9)等价于

$$\sqrt{a^2b^2}\geqslant ab. \tag{3.10}$$

但是

$$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=|ab|,$$

因此(3.10)等价于

$$|ab|\geqslant ab. \tag{3.11}$$

于是(3.6)与(3.11)等价。

由定理3.1知任意实数小于或者等于它的绝对值，因此(3.11)是正确的；当且仅当$ab\geqslant 0$时，(3.11)的等号成立。从而与(3.11)等价的不等式(3.6)也是正确的；当且仅当$ab\geqslant 0$时，等号成立。

将不等式(3.7)写成如下等价形式

$$\sqrt{(a-b)^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}$$

之后，可以类似地证明(3.7)。

不过，有趣的是(3.7)还可以直接从(3.6)推出来。事实上，用$a-b$去替换(3.6)中的a，就得到

$$|a-b|+|b|\geqslant|a-b+b|,$$

或者

$$|a-b|+|b|\geqslant|a|,$$

再依照减法规则(定理2.4)便得到

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{3.12}$$

类似地，用$b-a$去替换（3.6）中的b，得到

$$|a|+|b-a|\geqslant|a+b-a|,$$

或者

$$|a|+|b-a|\geqslant|b|,$$

即

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|. \tag{3.13}$$

又因为

$$\begin{aligned}||a|-|b|| &= \max\{(|a|-|b|), -(|a|-|b|)\} \\ &= \max\{(|a|-|b|), (|b|-|a|)\},\end{aligned}$$

所以从(3.12)和(3.13)便得到

$$|a-b|\geqslant||a|-|b||.$$

即(3.7)是对的，当且仅当(3.12)或(3.13)的等号成立时，(3.7)的等号也成立。

因为用$a-b$去替换a后得到了(3.12)，所以当且仅当$(a-b)b\geqslant 0$，即$ab\geqslant b^2$时，(3.12)的等号成立。显然后面这个不等式当且仅当$ab\geqslant 0$且$|a|\geqslant|b|$时，才是正确的。类似地，(3.13)的等号当且仅当$a(b-a)\geqslant 0$，即$ab\geqslant a^2$时成立。后面这个不等式当且仅当$ab\geqslant 0$且$|b|\geqslant|a|$时是对的。考虑到不等式$|a|\geqslant|b|$和$|b|\geqslant|a|$至少有一个成立，于是证明了当且仅当$ab\geqslant 0$时，(3.7)的等号成立。这样，我们便从(3.6)推出了(3.7)。

大家可能已注意到：既然b代表任意实数(正数、零或者负数)，那么如果用$-b$去替换b，不等式(3.6)与(3.7)仍然成立，因此从(3.6)得到

$$|a|+|b|\geqslant|a-b|, \tag{3.14}$$

从(3.7)又得到

$$|a+b| \geqslant ||a|-|b||, \tag{3.15}$$

当且仅当$a(-b)\geqslant 0$，即$ab\leqslant 0$时，等号成立。

把不等式(3.6)，(3.7)，(3.14)和(3.15)合在一起，便可以写成

$$|a|+|b| \geqslant |a+b| \geqslant ||a|-|b||. \tag{3.16}$$

习　题　六

1．从绝对值的代数刻划出发，证明：对一切实数a，b有

(a) $|-a|=|a|$；　　(b) $|ab|=|a|\cdot|b|$；

(c) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$。

2．当

(a) $a=\pi$，$b=2\pi$；　　(b) $a=-\pi$，$b=\sqrt{2}$；

(c) $a=2$，$b=0$；　　(d) $a=-9$，$b=-10$；

(e) $a=9$，$b=-10$

时，试确定在混合不等式$|a-b|\geqslant||a|-|b||$中，是符号“$>$”成立呢，还是符号“$=$”成立。

3．当

(a) $a=3$，$b=-2$；　　(b) $a=-3$，$b=-2$；

(c) $a=3$，$b=2$；　　(d) $a=0$，$b=-2$；

(e) $a=0$，$b=0$

时，试确定在混合不等式$|a|+|b|\geqslant|a+b|$中，是符号“$>$”成立呢，还是符号“$=$”成立。

4．对于不等式$|a+b|\geqslant||a|-|b||$，重复第2题。

5．对于不等式$|a|+|b|\geqslant|a-b|$，重复第3题。

6．证明：不等式$|a-b|\geqslant||a|-|b||$等价于不等式

$|ab|\geqslant ab$。

7． 证明：如果$ab\geqslant 0$，那么$ab\geqslant \min\{a^2, b^2\}$。

8． 证明：从 $|a|=\sqrt{a^2}$可以推出本章所给出的关于$|a|$的每一个刻划。

第四章　经典不等式

4.1　引言

基本工具已经准备就绪，现在我们要来表演几套数学魔术。正象画家可以从画布上的寥寥几笔创作出美丽迷人的图画，音乐家能够将很少几组音符变化发展为动听美妙的旋律那样，数学家则往往通过不多几步逻辑推理揭示出简明优美的结果。这些结果尽管简单，然而在其来龙去脉被领悟以前，却常常象魔棍变出来的戏法似的显得神秘莫测。

在这一章里，我们将利用前几章的基本结果推导出数学分析中几个最著名的不等式，这些不等式是数学分析专家们随时要用的工具。

第五章要说明怎样利用这些不等式去解决一系列有趣的问题，一眼看去这些问题似与代数及不等式相距甚远。第六章继续讨论这些应用，并讨论、推广距离的概念。

可以这样说，数学的魅力之一在于按照一定的顺序，运用简单的思想，得出一个又一个起初无论如何也想象不到的结果。

4.2　算术中项与几何中项的不等式

(a) 数学试验

设有两个非负数，例如 1，2，我们可以用两种方式得到它们的“中项”，这就是算术中项(或其和之半)，通常称为“平均值”：

$$\frac{1+2}{2}=1.5,$$

以及几何中项(或其积的平方根)：

$$\sqrt{1\cdot 2}=1.414\cdots.$$

这里有$1.5>1.414\cdots$。同样，从数3与9出发也能得到算术中项$(3+9)/2=6$以及几何中项$\sqrt{27}=5.19\cdots$。注意，又有$6>5.19\cdots$。继续用随机选出的一对非负数例如11与13，1/2与1/4等等去做，我们总是观察到相同的事实：算术中项大于几何中项。

我们是否有把握把这一发现推广成为某种结论呢？当察觉到有可能存在一个定理的时候，我们的数学嗅觉就开始高度地兴奋起来。说不定这个结论对任意一对非负数都是对的！换句话说，我们猜测两个非负数的算术中项至少与几何中项一样大。下面我们用代数符号来表达这一猜测，并在(b)段中给出证明。

定理4.1 对于任意非负数a，b，有

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\tag{4.1}$$

当且仅当$a=b$时，等号成立。

注意，若此二数有一为正，另一为负，则(4.1)无意义，因为(4.1)的右边是虚数①。若此二数均为负数，则(4.2)左边为负，右边为正，因此定理不成立。

上面那种先用具体数字反复试验而后引出定理的方法，是数学家们在探索新定理时所经常使用的。在以前，这样做

---

① 不等号不能用于虚数，只能用于其绝对值。

是十分艰苦的。但现在，利用现代数字计算机，几小时之内就能试验成千上万种情形。这种数学试验常给我们提供有价值的线索。

习　题　一

1． 关于以下数对，试确定算术中项与几何中项：

(a) 2，8； (b) 3，12；

(c) 4，9； (d) 0，20。

2． 设 p 为非负数。关于以下数对，试确定算术中项与几何中项：

(a) p，$9p$； (b) 0，p；

(c) 2，$2p^2$。

(b) 关于两个数的算术中项-几何中项不等式的证明

平方根比较麻烦，为了证明方便，不妨将 a，b 写为

$$a=c^2,\quad b=d^2. \tag{4.2}$$

这样做是可以的，因为定理4.1中 a，b 都是非负数。这样一来，我们所要证明的关系式(4.1)就变成

$$\frac{c^2+d^2}{2}\geqslant cd, \tag{4.3}$$

其中 c，d 为任意实数。不等式(4.3)当且仅当

$$\frac{c^2+d^2}{2}-cd\geqslant 0 \tag{4.4}$$

时成立。再根据处理不等式的基本法则，知(4.4)等价于

$$c^2+d^2-2cd\geqslant 0. \tag{4.5}$$

现在我们认出了一个老朋友，即

$$c^2+d^2-2cd=(c-d)^2, \tag{4.6}$$

于是(4.5)等价于

$$(c-d)^2\geqslant 0。\qquad (4.7)$$

由定理1.3，任何实数的平方是非负数，因此(4.7)是对的。这样，(4.5)从而(4.4)，(4.3)以及(4.2)也都是对的。(4.7)的等号当且仅当 $c-d=0$，即 $c=d$ 时成立；等价地，(4.1)的等号当且仅当 $a=b$ 时成立。

请注意，尽管定理4.1的不等式(4.1)只适用于非负数 a，b，但是不等式(4.3)却对一切实数 c，d 都成立(其中等号成立的条件是 $c=d$)。下面，大家还将注意到与此有关的第4.4节及4.6节的结果同样不仅仅限于非负数，它们关于所有的实数也都是对的。

(c)几何证明

定理4.1也可以用几何方法加以证明。考虑 $y=x$ 的图形(见图4.1)。设 S，T 为直线 $y=x$ 上坐标分别为(c,c)及(d,d)的两点。并考虑点 $P(c,0)$，$Q(0,d)$，$R(c,d)$，如图所示。由于 OP 长度为 c，PS 有相同的长度 c，因此三角形 OPS 的面积为 $c^2/2$，即底乘高的一半。类似地，三角形 OQT 的面积为 $d^2/2$。

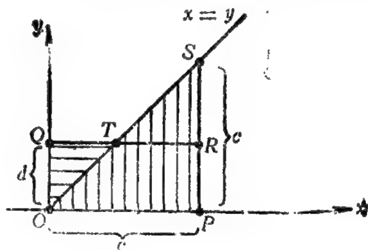


图4.1 不等式 $\frac{c^2+d^2}{2}\geqslant cd$ 的几何证明

现在考察矩形 $OPRQ$。它的面积被三角形 OPS 和 OQT 所完全覆盖，因此

$$\text{面积}(OPS)+\text{面积}(OQT)\geqslant\text{面积}(OPRQ)。\qquad (4.8)$$

因为 $OPRQ$ 的面积是cd，即长乘宽，所以可将(4.8)用代数

符号写为

$$\frac{c^2+d^2}{2} \geqslant cd. \tag{4.9}$$

不等式(4.9)与不等式(4.3)是完全一样的，于是完成了定理4.1的几何证明。

我们进一步看到，仅当三角形 TRS 面积为零，即 S 与 T 重合因而 $c=d$ 时，等号成立。

(d)几何推广

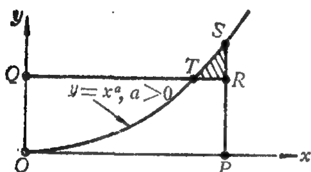


图4.2　一个更一般的几何不等式

稍微想一下就会发现，当 OTS 不是一段直线而是一段曲线时，上述论证仍然成立。考虑图4.2，显然下式成立：

$$\text{面积}(OPS)+\text{面积}(OQT) \geqslant \text{面积}(OPRQ). \tag{4.10}$$

当你们学过微积分并且学会了如何计算简单曲线面积，比如计算曲线 $y=x^a$(其中 a 是任意实数)的下方图形的面积以后，你将会发现，这个方法将以一种非常简单的方式产生出许多有趣的不等式。在本章后面几节，我们将依不同的途径得到其中的一些不等式。

习　题　二

1. 令 a 与 b 表示直线上相邻两线段的长度，并以它们的和为直径画一个圆，如图4.3。证明：此圆半径 r 是 a 与 b 的算术中项，垂直距离 h 是它们的几何

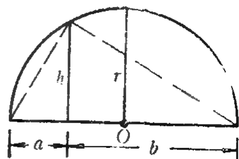


图　4.3

中项。

2． 非常自然地出现在光学和电网研究中的平均值是**调和中项**。对已知两个正数 a 与 b，由关系式

$$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

所决定的数 c 称为调和中项。由这个方程解出 c，得到

$$c=\frac{2}{1/a+1/b}=\frac{2ab}{a+b}.$$

证明：调和中项小于或等于算术中项，而且也小于或等于几何中项，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立；即证明

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}.$$

3.求出以下各数对的调和中项，几何中项及算术中项：

(a) 2，8； (b) 3，12； (c) 4，9；

(d) 5，7； (e) 6，6。

4． 距离 d、速度 r 和时间 t 的关系是 $d=rt$。证明：如果从一个城镇到另一个城镇，一半路程用速度 r_1 走，另一半路程用速度 r_2 走，那么，平均速度就是 r_1 和 r_2 的调和中项。但是，如果在一半的时间内用速度 r_1 走，在另一半时间内用速度 r_2 走，那么平均速度就是 r_1 和 r_2 的算术中项。如果 $r_1\neq r_2$，用哪一种方法可以更快地到达目的地？

5． 用定理4.1的结果解决第二章第2.7节的第 2 题。

(e) 关于三个数的算术中项-几何中项不等式

让我们来作进一步的试验。取三个非负数比如 1，2，4，象前面那样，我们计算它们的算术中项——简单的平均值

$$\frac{1+2+4}{3}=2.33\cdots.$$

再计算它们的几何中项，即其积的立方根

$$\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 4}=2.$$

我们看到，这三个数的算术中项大于它们的几何中项。用三个非负数作若干这样的试验，我们总是观察到同样的结果。于是我们猜想又找到了另一个定理。是不是定理 4.1 可以有一个推广，即三个非负数的算术中项至少与它们的几何中项一样大呢？

我们希望证明

定理4.2 对于任意三个非负数 a，b，c，有

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc};\tag{4.11}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立。

为了去掉立方根，令

$$a=x^3,\qquad b=y^3,\qquad c=z^3.\tag{4.12}$$

用这些值去替换(4.11)中的 a，b，c，得到

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\geqslant xyz,\tag{4.13}$$

它等价于

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqslant 0.\tag{4.14}$$

下面通过证明(4.14)对任意非负数 x，y，z 成立来证明定理 4.2。

我们再次得到一个可以分解因式的表达式。它的因式分解不象上面用到的(4.6)那样普通，但仍然是很有用的。这就是

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz), \quad (4.15)$$
此式可用乘法来验证。

因为 $x+y+z$ 是非负的，即(4.15)右边的第一个因式是正的(除非 $x=y=z=0$)，所以为了证明(4.14)，只需证明第二个因式也是非负的，即只需证明

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz \geqslant 0. \quad (4.16)$$

利用不等式 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy \geqslant 0$（此不等式在上面(b)段中已用过一次），便可推出不等式(4.16)。先写出

$$x^2+y^2 \geqslant 2xy, \quad x^2+z^2 \geqslant 2xz, \quad y^2+z^2 \geqslant 2yz, \quad (4.17)$$

再将这三个不等式相加，便得到

$$2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+xz+yz), \quad (4.18)$$

此式与我们所要证明的不等式(4.16)等价。这里当且仅当 $x=y=z$ 时，等号成立。

既然不等式(4.16)已被证明是正确的，而且 $x+y+z \geqslant 0$，因此(4.15)的左边也 $\geqslant 0$，即不等式(4.14)成立。而(4.14)等价于(4.11)，于是我们证明了关于三个数的算术中项-几何中项不等式；在(4.14)中，等号成立的条件是 $x=y=z$，这等价于在(4.11)中等号成立的条件为 $a=b=c$。

(f) 关于 n 个数的算术中项-几何中项不等式

在这次成功的鼓舞下，我们猜测对于两个数的以及三个数的中项所得到的结果，仅仅是对于任意多个正数都成立的普遍定理的一个特殊情形。如果这一猜测是对的，那么我们有如下结果：

定理4.3 对于任意 n 个非负数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}; \quad (4.19)$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立。

这就是 n 个数的算术中项及几何中项的著名不等式。下面证明它确实是对的。我们之所以集中精力于这个不等式有好几个原因：第一，它是一个很有魅力的不等式，又是可以用许许多多有趣的方式建立起来的一个不等式；基于各种各样想法的证明简直有好几打之多；第二，它可以作为不等式论的基本定理，成为支撑其它许多非常重要结果的基石。第三，正象你们在第五章中将要看到的，我们可以用它的一些推论来解决许多最大值和最小值问题。

在试图证明这个一般性不等式的时候，第一个想法也许是继续沿着过去的路线，对 $n=4$ 运用另一个代数的因式分解，对 $n=5$ 又运用其它的因式分解，如此等等。但是这种途径既乏味又行不通。事实上，沿着这条路线是不会有简单的证明的。

我们将另外给出一个基于两次应用数学归纳法的简单证明。一次是"向前"归纳，对所有 2 的方幂，即对 $n=2^k$ 导出所需结果；另一次是"向后"归纳（从任意正整数到它前面的那一个数），两次归纳配合起来，就可对所有正整数 n 证明我们的结果。

（i）向前归纳　我们所要使用的方法，共实是数学归纳法（第二章第2.6节已经讨论过）基本技巧的一个有意思的变形。

我们从 $n=2$ 开始，即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}, \qquad (4.20)$$

由定理4.1，此式对所有非负数 a 与 b 都是正确的，在证明当中用了一点数学的机智。虽然对定理4.3有许许多多简单

的证明，但是在这些证明中也都用了这种机智。

令

$$a=\frac{a_1+a_2}{2},\qquad b=\frac{a_3+a_4}{2},$$

这里 a_1,a_2,a_3,a_4 是非负数。用这些值去替换(4.20)中的 a 与 b，便得到不等式

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)},$$

或者

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}. \quad (4.21)$$

因为不等式(4.21)的左边已具有所需要的形式(见定理4.3)，所以我们把注意力集中在右边。运用不等式

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2},\qquad \frac{a_3+a_4}{2}\geqslant\sqrt{a_3a_4}, \quad (4.22)$$

以及传递规则(定理2.1)，便从(4.21)得到进一步的不等式

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=(a_1a_2a_3a_4)^{1/4}. \quad (4.23)$$

这恰好是我们所需要的关于四个非负数的结果。即对于$n=4$，算术中项大于或等于几何中项。

当且仅当

$$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{a_3+a_4}{2}$$

时，(4.21)中的等号成立，又当且仅当 $a_1=a_2,a_3=a_4$时，(4.22)中的等号成立；因此当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时，(4.23)中的等号成立。

上述技巧可以畅通无阻地重复使用下去。令

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2},\qquad a_2=\frac{b_3+b_4}{2},$$

$$a_3=\frac{b_5+b_6}{2},\qquad a_4=\frac{b_7+b_8}{2},$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,8)$是非负数。代入(4.23)，有

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8}$$

$$\geqslant\left[\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{b_3+b_4}{2}\right)\left(\frac{b_5+b_6}{2}\right)\left(\frac{b_7+b_8}{2}\right)\right]^{1/4}.$$

利用不等式

$$\frac{b_1+b_2}{2}\geqslant\sqrt{b_1b_2},\qquad\cdots,\qquad\frac{b_7+b_8}{2}\geqslant\sqrt{b_7b_8},$$

以及乘法规则和传递规则，又得到关于 8 个数的结果

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_8}{8}\geqslant(\sqrt{b_1b_2}\sqrt{b_3b_4}\sqrt{b_5b_6}\sqrt{b_7b_8})^{1/4}$$

$$=(b_1b_2\cdots b_8)^{1/8},$$

当且仅当所有 b_i 都相等时，等号成立。

如此继续下去，显然可以对 2 的所有方幂 n，即 $n=2,4,8,16,\cdots$建立起相应的不等式。为了严格地证明这一结论，我们利用数学归纳法。主要步骤是证明以下结果：

算术中项-几何中项不等式对所有形如 $2^k(k=1,2,\cdots)$ 的整数 n 成立。

证明 我们已经知道这个结果对 $n=2=2^1$，即对 $k=1$ 是正确的，而且实际上对 $n=2^2$ 和 2^3 也是正确的。现在假定它对形如 2^k 的整数 n 正确，下面来对 2^{k+1} 建立这一结论。因为$2^{k+1}=2\cdot2^k=2n$，所以就意味着我们要对$2n$证明这

个结果。

已经假定

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \qquad (4.24)$$

对任意非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成立，其中 $n=2^k$。选择 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$，使它们取值如下：

$$a_1=\frac{b_1+b_2}{2},\quad a_2=\frac{b_3+b_4}{2},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{b_{2n-1}+b_{2n}}{2},$$

这里的 $2n$ 个数 $b_j(j=1,2,\cdots,2n)$ 是给定的非负数。将 a_i 代入(4.24)，便得到

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{2n}}{2n}\geqslant(b_1b_2\cdots b_{2n})^{1/2n}.$$

同样，当且仅当所有的 b_j 都相等时，等号成立。这样，我们就对$2n$或者 2^{k+1} 建立了所需要的结果。

因为这个不等式对于 $k=1$ 是成立的，所以由(向前)数学归纳法的原则可以断言，对所有正整数 k 结论成立，从而不等式(4.24)对所有的 2 的方幂 n 成立。

(ii) 向后归纳　既然我们已对 2 的方幂得到了上述结果，那么怎样对正整数的全部集合来证明这一结果呢？

这里需要另外一个程序。考虑 $n=3$ 的情形。(当然，对于这个特殊情形，我们在(e)段中已经用另一种方法建立了上述结果。)利用关于 $n=2^2=4$ 的关系式

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant(a_1a_2a_3a_4)^{1/4}, \qquad (4.25)$$

此式已用向前归纳法证明了，现在我们来看是否可以由此推得关于$n=3$的相应结果。

我们采用一种重要的特殊化的技巧。从(4.25)出发，以

特殊方式选取 a_1, a_2, a_3, a_4 的值。令

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \tag{4.26}$$

并且使 a_4 的值满足等式

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}.$$

由(4.26)，知

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3 + a_4}{4} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3},$$

从而

$$a_4 = \frac{4}{3}(b_1 + b_2 + b_3) - (b_1 + b_2 + b_3) = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}.$$

将这些特殊的 a_i 值代入(4.25)，便导出关系式

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \geqslant \sqrt[4]{b_1 b_2 b_3 \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)}.$$

两边同时 4 次方，得到

$$\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^4 \geqslant b_1 b_2 b_3 \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right),$$

最后，两边同除以 $(b_1 + b_2 + b_3)/3$，得

$$\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^3 \geqslant b_1 b_2 b_3,$$

此式等价于所需要的结果

$$\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}. \tag{4.27}$$

上面已证当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ 时，(4.25)中的等号成立，于是推出当且仅当 $b_1 = b_2 = b_3$ 时，(4.27)中的等号成立。

为了把这种方法推广到一般情形，我们要利用一种归纳的技巧，不过，这不是标准形式的归纳技巧。我们不去证明

若结论对 n 成立，则对$n+1$也成立，而是去证明若结论对 n 成立，则对 $n-1$ 也成立。因为我们已经知道了定理对 $n=2^k$ $(k=1,2,\cdots)$是成立的，所以用这种方法就会得到对所有的 n 都成立的普遍定理。

现在来证明，若结论对 n 成立，则对$n-1$也成立，为此，我们重复上面用过的特殊化的巧技。令

$$a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad \cdots,\quad a_{n-1}=b_{n-1},\tag{4.28}$$

并且用条件

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

来确定a_n；由此式解出a_n，并利用(4.28)，便得到

$$a_n=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}.\tag{4.29}$$

上面已经假定不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

对 n 个非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是成立的；用(4.28)和(4.29)的值去替换a_i，有

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

$$\geqslant\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_{n-1}\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)}.$$

两边同时 n 次方并化简，得到不等式

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}\geqslant b_1b_2\cdots b_{n-1}.$$

它等价于所需要的结果

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\geqslant \sqrt[n-1]{b_1b_2\cdots b_{n-1}}.$$

象以前一样，当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_{n-1}$ 时，等号成立。至此定理 4.3 证毕。

4.3 算术中项-几何中项不等式的一般化

我们指出，对于上面所导出的基本的算术中项-几何中项定理来说，许多结果看上去好象是它的一般化，实际上不过是它的特殊情形。

首先，在算术中项-几何中项不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}$$

中，让前 m 个 x_i 等于同一个非负数 x，又让剩下的 $n-m$ 个数等于另一个非负数 y；即

$$x_1=x_2=\cdots=x_m=x,\quad x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=y.$$

此时算术中项-几何中项不等式变为

$$\frac{mx+(n-m)y}{n}\geqslant(x^my^{n-m})^{1/n},$$

或者

$$\frac{mx}{n}+\left(1-\frac{m}{n}\right)y\geqslant x^{m/n}y^{1-m/n}.$$

这里 n 是任意正整数，m 是在范围 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 内的任意整数。因此，m/n 可以表示区间 $0<r<1$ 内的任意有理分数。于是上式可写为

$$rx+(1-r)y\geqslant x^ry^{1-r},\tag{4.30}$$

对于下面的讨论来说，这是一个最重要的结果。

不等式(4.30)对任意两个非负数 x, y 以及介于 0 与 1 之间的任何分数 r 都是对的，当且仅当$x=y$时，等号成立。

令$1/p$表示 r。(由 $0<r<1$，知 $p>1$。)则

$$1-r=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}.$$

令 q 表示 $p/(p-1)$，于是 $1/q=1-r$，并且有

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

因而不等式(4.30)化为如下形式

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\geqslant x^{1/p}y^{1/q}. \tag{4.31}$$

为了去掉分数方幂，令

$$x=a^p,\qquad y=b^q. \tag{4.32}$$

于是(4.31)又化为

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab, \tag{4.33}$$

这里 a 与 b 是非负数，p 与 q 是满足$1/p+1/q=1$的有理数。当且仅当

$$a^p=b^q \tag{4.34}$$

时，等号成立。

一旦定义了什么是无理数，以及当 r 是无理数时，形如x^r的函数是什么意思，我们就能够或者用直接的方法，或者从不等式(4.30) 出发用极限的方法来证明：不等式(4.30)实际上对介于 0 与 1 之间的所有 r 都成立，从而(4.33) 对所有满足$1/p+1/q=1$的$p>1$， $q>1$成立。如果想进一步了解细节，那么大家应该首先读一读我们在第一章提到过的《数：有理数和无理数》一书。

习 题 三

1． 证明：若 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 是非负数，$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数，则

$$\frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ky_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k}$$

$$\geqslant (y_1^{m_1} \ y_2^{m_2} \cdots y_k^{m_k})^{1/(m_1+m_2+\cdots+m_k)}.$$

从而证明：若 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 是满足

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = 1$$

的真分数，则

$$r_1y_1 + r_2y_2 + \cdots + r_ky_k \geqslant y_1^{r_1} \ y_2^{r_2} \cdots y_k^{r_k}.$$

2． 统计学中一个重要的平均数是均方根。对于两个非负数 a 与 b，均方根定义为下面的值

$$s = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

试对数偶（5,12），（0,1）和（p,p），计算其算术中项及均方根。

3． 证明：两个正数的算术中项小于或者等于它们的均方根：

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

在什么条件下等号成立？均方根与几何中项、调和中项相比较如何？

4． 令 $ABDC$ 为一梯形，其中 $AB = a$，$CD = b$（见图 4.4）。设 O 为其对角线的交点。证明：

(a) a 与 b 的算术中项 $(a+b)/2$ 由平行于两底且与它们

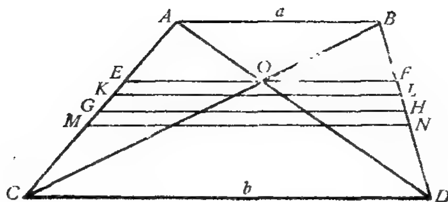


图4.4　关于 $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 的几何解释

等距离的线段GH表示。

(b) 几何中项$\sqrt{ab}$由平行于两底且使梯形$ABLK$与$KLDC$成相似形的线段KL表示。

(c) 调和中项由平行于两底且过O点的线段表示。

(d) 均方根由平行于两底且将梯形$ABDC$分为面积相等的两个梯形的线段MN表示。

4.4　哥西(Cauchy)不等式

(a) 二维形式　$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$

我们来介绍一个新的主题。正象一首乐曲那样，这一主题将和原来的主题编织在一起，进一步发展出更为美妙的结果。

我们从观察不等式 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ 开始。本章前几节的所有证明都建立在它的基础之上(见第4.2节的(b)段)，它是恒等式

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

的一个简单推论，后一式对于所有实数 a，b 都成立，不仅仅限于非负数 a，b。

今考虑乘积

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2). \qquad (4.35)$$

展开后，得

$$a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2,$$

此式与表达式

$$(ac+bd)^2+(bc-ad)^2 \tag{4.36}$$

的展开式相等，因此我们有

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2. \tag{4.37}$$

因为平方$(bc-ad)^2$是非负的，所以由（4.37）得到

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2,$$

$$a,b,c,d \text{ 为任意实数。} \tag{4.38}$$

这是贯穿在数学分析和数学物理中的一个极为重要而又非常漂亮的不等式，称为哥西不等式，更确切地说，它是哥西不等式的二维形式①。

另外，从(4.37)看出，当且仅当

$$bc-ad=0 \tag{4.39}$$

时，(4.38)中的等号成立。在这种情形，我们说两对数(a,b)与(c,d)成比例；如果$c\neq0$，$d\neq0$，那么条件(4.39)可以写为

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

(b) 几何解释

在第一次看到表达式(4.35)与(4.36)恒等时，读者会合情合理地想知道，世界上的人是怎么偶然碰上这个结果的呢？它使读者好象着了一套数学戏法的魔。

---

① 这个不等式在积分学中的推广是由数学家布尼亚可夫斯基(Buniakowski)和许尔瓦兹(Schwarz)彼此独立地发现的。在教科书中，“布尼亚可夫斯基-许尔瓦兹不等式”这一名称有时指的就是这个不等式，而不是特别指它的推广。

数学家有一个信条，那就是在数学当中沒有巧遇，凡是重要的结果都应该有一个解释，一旦掌握了它，就使这个结果变得不言而喻了。当然，这种解释可能并不那么一目了然，而且在一段时间里也可能沒有被发现。一个数学定理的意义往往要从上面去看，也就是说，要从更高的理论观点上去看，才会看得清楚。但是这种含义总是有的。这是极其重要的一点。若不是这样，数学就要退化为一堆沒有联系的公式和华而不实的技巧了。

对一个代数结果作最简单的解释，通常要借助于几何背景。那些看来似乎很奇怪、很复杂的公式，一旦暴露其几何根源之后，往往就变得显而易见了。

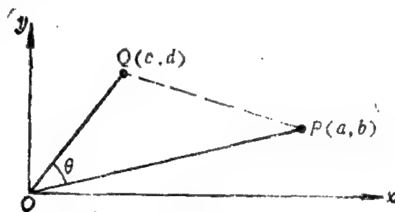


图4.5 哥西不等式的几何解释

考虑图4.5所示的三角形。线段OP，OQ及PQ的长度① 分别由下面的式子给出：

$$OP=(a^2+b^2)^{1/2},\qquad OQ=(c^2+d^2)^{1/2},$$

以及

$$PQ=[(a-c)^2+(b-d)^2]^{1/2}.$$

用θ表示OP与OQ间的夹角。由余弦定律，我们有

$$(PQ)^2=(OP)^2+(OQ)^2-2(OP)(OQ)\cos\theta.$$

将OP，OQ，PQ的值代入，并化简，得到

① 线段XY的长度通常记作$\overline{XY}$，为了印刷方便，本书仍记作XY。

$$\cos\theta = \frac{ac+bd}{(a^2+b^2)^{1/2}(c^2+d^2)^{1/2}}. \qquad (4.40)$$

因为一个角的余弦一定介于 -1 与 $+1$ 之间，所以必有

$$0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1. \qquad (4.41)$$

将(4.40)两边平方，得到

$$\cos^2\theta = \frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leqslant 1,$$

于是

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2.$$

这就是哥西不等式的二维形式(4.38)，它的上述代数证明似乎是那样的不可思议。

另外，我们看到当且仅当 $\cos^2\theta = 1$，即当且仅当 θ 是零或者是平角，亦即当且仅当点 O, P, Q 在同一条直线上时，等号成立。在这种情形，斜率之间必定存在一个等式；换句话说，除非 $c = d = 0$，我们总有

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

(c) 哥西不等式的三维形式

上面这种类型的解释有一个优点，那就是我们可以利用几何直观对任意维数得到类似的结果。

我们来考虑三维情形。设 $P(a_1, a_2, a_3)$，$Q(b_1, b_2, b_3)$ 是不同于原点 $O(0,0,0)$ 的两个点，则 OP 与 OQ 之间的夹角 θ 的余弦由

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}}$$

给出①，再由 $\cos^2\theta \leqslant 1$，便得到著名的哥西不等式的三维形式：

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2. \tag{4.42}$$

当且仅当O,P,Q三点共线时，等号成立；此时，只要这里的 b 都不是零，就有

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

(d) 哥西-拉格朗日(Lagrange)恒等式和哥西不等式的 n 维形式

三维形式的哥西不等式(4.42)有一个严格的代数证明，它可以由下面的关系式得到：

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)&(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\&=(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2)+(a_2^2b_3^2+a_3^2b_2^2)\\&\quad-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_2b_2a_3b_3\\&=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2.\end{aligned} \tag{4.43}$$

显然，(4.43)中的最后一个表达式是非负的，因为它是三个非负项的和。因此

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \geqslant 0,$$

于是三维形式的哥西不等式再一次得到了证明。从恒等式(4.43)既能推出上面的不等式，又能推出等式；(4.43)中最后的式子等于零的条件是每一项为零，即这些 a,b 成比例。

---

① 关于推导，可以参阅奥斯古德与格劳斯坦著《平面与立体解析几何》(W.F.Osgood and W.C.Graustein, Plane and Solid Analytic Geometry, Macmillan and Co., New York, 1930)。

当你们学到三维解析几何时将会看到，恒等式(4.43)不过是

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

的另一种形式。

恒等式(4.43)可作如下推广：对于任意一组 a_i 与 b_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，我们有

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \cdots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2; \tag{4.44}$$

这就是著名的哥西-拉格朗日恒等式。从这个恒等式出发，便得到哥西不等式的 n 维形式

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2, \tag{4.45}$$

这个不等式对于任意实数值 a_i 与 b_i 都成立。

(e) 三维哥西不等式的另一个证明

上面所给出的证明，就现有的结果而言，是完全令人满意的。然而对于我们以后将要导出的一些结果来说，这些证明却不能推广。因此，下面引进一个新的方法从头再推一遍。

我们从基本不等式 $(x-y)^2 \geqslant 0$ 的另一种形式

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geqslant xy \tag{4.46}$$

开始。此式对所有实数 x, y 都成立。依次将下面的值代入：

$$x = \frac{a_1}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}}, \quad y = \frac{b_1}{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}},$$

$$x=\frac{a_2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}},\quad y=\frac{b_2}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

$$x=\frac{a_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}},\quad y=\frac{b_3}{(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

这些 a_i, b_i 都是实数。将代入后得到的三个不等式相加，便得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\right)$$

$$\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}},$$

注意到这个不等式的左端为 1，因此有

$$1\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+b_3^2)^{1/2}}.$$

此式与我们所要证明的三维哥西不等式(4.42)等价。

哥西不等式的 n 维形式(4.45)可用类似方法给出证明。

4.5 赫尔德(Hölder)不等式

现在，我们已经有了一切必要的工具可以去建立分析学中最有用的不等式之一，赫尔德不等式。这个不等式断言，对于任意非负数 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}$$
$$\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, \qquad (4.47)$$

这里，p 与 q 满足关系式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (4.48)$$

并且 $p>1$。

$p=q=2$ 的情形就是前几节所建立的哥西不等式。但是在一般情形下，我们必须只限于考虑非负的a_i与b_i，因为可能会涉及到分数方幂 p，q。

下面，我们只对有理数 p，q 来证明(4.47)；但是，这个结果对无理数 p 与 q 也是对的。

首先从不等式

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab$$

开始，这个不等式是我们在第4.3节已证明过的；对于 p，q 是有理数并且 a,b 是非负数的情形，请见(4.33)。然后我们运用在第 4.4 节中用过的技巧。令

$$a=\frac{a_1}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}},\quad b=\frac{b_1}{(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}},$$

又令

$$a=\frac{a_2}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}},\quad b=\frac{b_2}{(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}},$$

如此等等，再把所得到的不等式加起来，于是有

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q}{b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q}\right)$$

$$\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q}},\tag{4.49}$$

最后，利用(4.48)便得到不等式(4.47)。当且仅当 b_i^q/a_i^p 对于所有 i 有共同值时，(4.49)式的等号成立。

4.6 三角形不等式

大家都熟悉三角形两边之和大于或者等于第三边的几何定理。现在让我们看看这个定理在代数上蕴含着什么。

取一个如图4.6所示的三角形，几何不等式

$$OP+PR\geqslant OR$$

等价于代数上的三角形不等式

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\ . \quad (4.50)$$

证明三角形不等式能否不用几何定理呢？一维的情形已在第3.8节中证明了(见定理3.2)，在那里，不等式

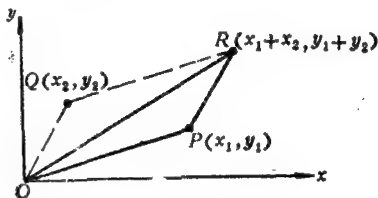


图4.6 三角形不等式

$$\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}\geqslant\sqrt{(x_1+x_2)^2}$$

经常写成如下形式

$$|x_1|+|x_2|\geqslant|x_1+x_2|.$$

证明二维三角形不等式的最简单的方法是建立一个与之等价的不等式。为此，将(4.50)两边平方，得到不等式

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$
$$\geqslant(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2,$$

容易看出，此不等式等价于

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant x_1x_2+y_1y_2; \qquad (4.51)$$

这正是我们所熟知的哥西不等式(二维形式，见(4.38))

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\geqslant(x_1x_2+y_1y_2)^2 \qquad (4.52)$$

的一个简单推论；于是三角形不等式得到了证明。

如同一维情形那样(定理3.2)，这里也可以讨论关于三角形不等式(4.50)中等号成立的条件。大家会记得，在哥西不等式(4.52)中，当且仅当(x_1,y_1)与(x_2,y_2)成比例，即$x_1=kx_2$，$y_1=ky_2$时，等号成立。今(4.51)是由(4.52)取平方根而来的；这种运算是可行的，因为左边取的是非负平方根。但是，如果$x_1x_2+y_1y_2<0$，也就是说，如果$x_1x_2+y_1y_2$是(4.52)的右端$(x_1x_2+y_1y_2)^2$的负平方根，那么，即使(x_1,y_1)与(x_2,y_2)成比例，在(4.51)中严格的不等号也成立。因此，当且仅当$x_1=kx_2$且$y_1=ky_2$(其中k是非负比例常数①)时，在(4.51)中，从而在三角形不等式(4.50)中，等号才成立。

使三角形不等式(4.50)中等号成立的上述充要条件在几何上有一个解释，即在图4.5中，三点O,P,Q共线，并且P与Q在O的同一侧。这时，三角形OPR退化了。在这种情形，我们不仅说P,Q与O共线，而且还说它们位于从O点出发的同一条射线上。

大家可以检验，以上讨论与一维情形$|a|+|b|\geqslant|a+b|$的对应条件(即当且仅当a,b同号时，其中等号成立)的讨论是一致的。

按照赫尔德不等式证明中的办法，关于三角形不等式的证明可以被推广而得到

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2}$$
$$\geqslant\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2},$$

此式对于一切实数x_i,y_i都成立，并且和前面一样，当且仅当这些x_i与y_i成比例并有一个正的比例因子时，等号成

① 例如，$(-3,4)$与$(6,-8)$成比例，比例常数为负数，而$(-3,4)$与$(-6,8)$的比例常数为正数

立。我们将在第六章中指出上述不等式的几何意义。

下面是三角形不等式的另一个证明，这个证明可以被推广，还可以给出一个更一般的结果。写出恒等式

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$
$$=x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)+x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2),$$

并对两个表达式

$$x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2) \quad 及 \quad x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2)$$

分别运用平方根形式的哥西不等式(见不等式(4.51))，便得到

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$$
$$\geqslant x_1(x_1+x_2)+y_1(y_1+y_2)$$

及

$$(x_2^2+y_2^2)^{1/2}[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$$
$$\geqslant x_2(x_1+x_2)+y_2(y_1+y_2).$$

两式相加，有

$$[(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2}][(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$$
$$\geqslant (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2.$$

两边除以同一因子$[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}$，得到

$$(x_1^2+y_1^2)^{1/2}+(x_2^2+y_2^2)^{1/2}\geqslant[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2]^{1/2}.$$

于是我们再次证明了三角形不等式(4.50)。

回到平方根形式的哥西不等式(4.51)，我们又一次看到，当且仅当

$$x_1=kx_2, \quad y_1=ky_2,$$

其中k是某个非负的比例因子，也就是说，当且仅当O,P,Q三点共线，且P,Q在O的同一侧时，等号成立。

4.7 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

现在，我们已具备了建立另一个著名的闵可夫斯基不等

式的一切工具和方法。这个不等式断言，对于任意非负数①x_1, y_1, x_2, y_2 及任意 $p>1$，有

$$(x_1^p + y_1^p)^{1/p} + (x_2^p + y_2^p)^{1/p} \geqslant [(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p]^{1/p}. \quad (4.53)$$

三角形不等式是这里 $p=2$ 的特殊情形。

闵可夫斯基不等式的证明与前面刚给出的关于三角形不等式的证明类似，所不同的是用更为一般的赫尔德不等式(见第4.5节)去代替哥西不等式。先写出恒等式

$$(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p = [x_1(x_1+x_2)^{p-1} + y_1(y_1+y_2)^{p-1}] + [x_2(x_1+x_2)^{p-1} + y_2(y_1+y_2)^{p-1}],$$

并对其中每一项分别运用赫尔德不等式。所得结果为

$$(x_1^p + y_1^p)^{1/p}[(x_1+x_2)^{(p-1)q} + (y_1+y_2)^{(p-1)q}]^{1/q} \geqslant x_1(x_1+x_2)^{p-1} + y_1(y_1+y_2)^{p-1},$$

及

$$(x_2^p + y_2^p)^{1/p}[(x_1+x_2)^{(p-1)q} + (y_1+y_2)^{(p-1)q}]^{1/q} \geqslant x_2(x_1+x_2)^{p-1} + y_2(y_1+y_2)^{p-1}.$$

由$1/p+1/q=1$，知$(p-1)q=p$。二式相加得

$$[(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p]^{1/q}[(x_1^p+y_1^p)^{1/p} + (x_2^p+y_2^p)^{1/p}] \geqslant (x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p;$$

两边同除以$[(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p]^{1/q}$，得到

$$(x_1^p+y_1^p)^{1/p} + (x_2^p+y_2^p)^{1/p} \geqslant [(x_1+x_2)^p + (y_1+y_2)^p]^{1-1/q},$$

因为$1-1/q=1/p$，所以这就是闵可夫斯基不等式(4.53)。当且仅当赫尔德不等式((4.53)是用它证明的)中等号成立

① 这里限于非负数是必要的，因为一般会遇到 p, q 为分数幂的情形.

时，也就是说当且仅当点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)(这两点在第一象限)共线时，闵可夫斯基不等式中的等号成立。

正如大家从上述哥西不等式、赫尔德不等式及三角形不等式的推广中可以猜测到的那样，关于n个非负数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \quad 与 \quad y_1, y_2, \cdots, y_n$$

的闵可夫斯基不等式为

$$[x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p]^{1/p} + [y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p]^{1/p} \geqslant [(x_1+y_1)^p + (x_2+y_2)^p + \cdots + (x_n+y_n)^p]^{1/p},$$

其中$p \geqslant 1$；当$p < 1$时，不等号要反过来。

4.8 绝对值与经典不等式

算术中项-几何中项不等式、哥西不等式、赫尔德不等式

表 3 关于非负数的经典不等式

名　称	不　等　式
算术中项-几何中项不等式	$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$
哥西不等式	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
赫尔德不等式	$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\cdots+b_n^q)^{1/q} \geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
三角形不等式	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2} \geqslant [(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$
闵可夫斯基不等式	$(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p)^{1/p}+(b_1^p+b_2^p+\cdots+b_n^p)^{1/p} \geqslant [(a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p+\cdots+(a_n+b_n)^p]^{1/p}$

式、三角形不等式以及闵可夫斯基不等式都是数学分析中的经典不等式。为了便于参考，将它们收集在表 3 中。

对于任意非负数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$；及任意 $p>1$（这里 p 满足$1/p+1/q=1$)上述不等式都成立。

哥西不等式与三角形不等式分别是赫尔德不等式与闵可夫斯基不等式在 $p=2$ 时的特殊情形。等号成立的充要条件，对算术中项-几何中项不等式而言是所有的 a_i 相等；对赫尔德不等式而言是诸(a_i^p),(b_i^p)成比例；对其余不等式而言是诸(a_i),(b_i)成比例。

上述诸不等式本来只是对非负数证明了的。然而任意实数的绝对值都是非负数，所以这些不等式对于任意实数的绝对值也适用。用定理3.2的结果（定理3.2指出，绝对值的和大于或者等于对应的和的绝对值),刚才注意到的事可以作某种推广；例如，关于闵可夫斯基不等式就有

$$|a_i|+|b_i|\geqslant|a_i+b_i|,$$

当且仅当 a_i 与 b_i 同号时，等号成立。我们把这些推广了的不等式列在表 4 中。

关于这些包含着任意实数值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的不等式，等号成立的充要条件：对算术中项-几何中项不等式而言是所有$|a_i|$相等；对赫尔德不等式而言是诸$(|a_i|^p)$,$(|b_i|^p)$成比例，且每个 a_ib_i 非负；对其余不等式而言是(a_i),(b_i)非负地成比例。

作为一个应用，对于给定的数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(y_1, y_2,\cdots,y_n)$与$(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,令

$$a_i=z_i-y_i \quad 及 \quad b_i=y_i-x_i,$$

则

$$a_i+b_i=z_i-y_i+y_i-x_i=z_i-x_i.$$

表 4 关于任意数值的经典不等式

名称	不等式
算术中项-几何中项不等式	$\frac{\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\cdots+\lvert a_n\rvert}{n}\geqslant\lvert a_1a_2\cdots a_n\rvert^{1/n}$
哥西不等式	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2}$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
赫尔德不等式	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}$ $\times(\lvert b_1\rvert^q+\lvert b_2\rvert^q+\cdots+\lvert b_n\rvert^q)^{1/q}$ $\geqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
三角形不等式	$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)^{1/2}$ $\geqslant[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2]^{1/2}$
闵可夫斯基不等式	$(\lvert a_1\rvert^p+\lvert a_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n\rvert^p)^{1/p}$ $+(\lvert b_1\rvert^p+\lvert b_2\rvert^p+\cdots+\lvert b_n\rvert^p)^{1/p}$ $\geqslant[\lvert a_1+b_1\rvert^p+\lvert a_2+b_2\rvert^p+\cdots+\lvert a_n+b_n\rvert^p]^{1/p}$

于是推广了的闵可夫斯基不等式化为

$$(|z_1-y_1|^p+|z_2-y_2|^p+\cdots+|z_n-y_n|^p)^{1/p}$$
$$+(|y_1-x_1|^p+|y_2-x_2|^p+\cdots+|y_n-x_n|^p)^{1/p}$$
$$\geqslant(|z_1-x_1|^p+|z_2-x_2|^p+\cdots+|z_n-x_n|^p)^{1/p};\tag{4.53'}$$

当且仅当$(z_1-y_1,z_2-y_2,\cdots,z_n-y_n)$与$(y_1-x_1,y_2-x_2,\cdots,y_n-x_n)$成比例且有非负的比例常数时，等号成立。

4.9 对称中项

看到这里，大家也许以为不等式的主题已经论述得相当详尽了。实际上恰恰相反。前面做过的一切，只不过是最最肤浅的探讨。我们已经建立了的那些不等式可以作难以计数的推广，这些推广本身又可以再推广。正如我们将要在本节

以及第4.10节所指出的那样，可以用不少巧妙的方法把它们结合起来，给出许多进一步的结果。

例如，下面是算术中项-几何中项不等式的一个饶有趣味的推广：作三种中项

$$m_1=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$m_2=\left(\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{3}\right)^{1/2},$$

$$m_3=(x_1x_2x_3)^{1/3}.$$

对所有非负数 x_1,x_2,x_3有连续不等式

$$m_1\geqslant m_2\geqslant m_3.$$

证明留给读者。这个不等式其实是关于 n 个非负数的类似结果的一个特殊情形，后者有 n 个中项，从算术中项开始，以几何中项结束。

4.10 高斯(Gauss)的算术-几何中项

设 a 与 b 是两个非负数，并考虑由 a，b 所定义 的 a_1与 b_1

$$a_1=\frac{a+b}{2},\qquad b_1=\sqrt{ab}.$$

由第1.3节的基本公理Ⅱ知，a_1与 b_1必定也是 非 负的。如果假设 $a>b$，那么我们有

$$a_1<\frac{a+a}{2}=a,\qquad b_1>\sqrt{b^2}=b.$$

此外，由算术中项-几何中项不等式，得到 $a_1>b_1$。我 们 用公式

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\qquad b_2=\sqrt{a_1b_1}$$

引进 a_2 与 b_2，重复上面的步骤，则按同样理由，有

$$a>a_1>a_2, \qquad b<b_1<b_2,$$

及

$$a_2>b_2.$$

继续定义

$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}, \qquad b_3=\sqrt{a_2b_2},$$

然后定义 a_4,b_4，一般地，可用递推公式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \qquad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \qquad (4.54)$$

定义 a_n,b_n。

进行到第 k 步时，得到数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，它们满足不等式

$$a>a_1>a_2>\cdots>a_k>b_k>b_{k-1}>\cdots>b_1>b.$$

例如，若 $a=4,b=1$，把前面几个 a_i 与 b_i 表示在图4.7所示的直线上，则可看到，在所有这些数当中，b 最小而 a 最大，并且所有的 b_i 小于所有的 a_i。

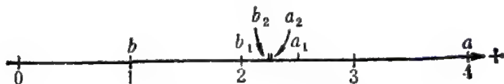


图4.7　高斯的算术-几何中项

不必作 k 步就停止。设想我们用关系式(4.54)定义越来越多的 a 与 b。这样定义的每一对 a_i,b_i 都夹在前一对 a_{i-1}，b_{i-1} 之间。于是，看来有理由认为这些 a_n 随 n 增大而减小，但始终大于每一个 b_i，而趋近于某个固定的数值 A；类似地，这些 b_n 随 n 增大而增大，但始终小于每一个 a_i，而趋近于某个固定的数值 B。熟悉极限概念的读者容易看出，A

是无穷数列$\{a_n\}$的极限，B是无穷数列$\{b_n\}$的极限。

此外，差a_n-b_n随n的增大而迅速变小。可以证明，每一步的差比前一步的差的一半还要小。事实上，由(4.54)得到

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}-\sqrt{a_nb_n}=\frac{a_n-2\sqrt{a_nb_n}+b_n}{2}. \quad (4.55)$$

因为 $\sqrt{b_n}<\sqrt{a_n}$，所以

$$2b_n<2\sqrt{a_nb_n};$$

在这个不等式两边同时加上$a_n-b_n-2\sqrt{a_nb_n}$，得到

$$a_n-2\sqrt{a_nb_n}+b_n<a_n-b_n,$$

代入(4.55)，便有

$$a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{1}{2}(a_n-b_n),$$

这正是我们所要证明的。

因为这些a，b按上述方式互相接近，所以它们的极限必定重合，即

$$A=B,$$

而且这一共同的极限值只依赖于我们开始时所取的两个数a，b；用数学的语言来说，A是a与b的函数。高斯指出，这个函数不只是一个满足好奇心的玩艺，而且在数学分析中是相当基本的，它可以用来建立一个叫做“椭圆函数论”的数学分支。

第五章　极大与极小问题

5.1　引言

下面，我们来说明怎样利用上一章导出的不等式去处理一些既重要又吸引人的极大与极小问题。

在学习代数与三角时，大家所遇到的问题都有如下性质：给定初始数据和运算规则，要求算出结果。或者反过来，给了运算规则和结果，要求初始数据。

例如有三个工人，A热心而勤勉，B刻苦而认真，C却懒惰成性。他们的任务是挖沟、修建游泳池或者建造住宅。问题往往是：给定各人的效率定额，要求确定三人一起干活要化多少时间，或者给定三人一起干活所需要的时间，以及三人当中两个人的工作效率，要求第三个人的效率。

又如，给定三角形的两边与一个夹角，或者给定三角形的三条边，要求确定其余的边与角。

上述问题都是所谓描述性问题的简单形式。

这一章要讨论的是完全不同类型的问题，要从许多可行的办法当中找出最优的方案。这类性质的问题在所有的科学分支中都已出现，并成为数学分析最重要的应用之一。另外，大量的物理学和工程学问题也被这样一条原理支配着，这原理断言：在自然界出现的物理过程中，总好象有某个量(例如时间或者能量)是被极小化了或者被极大化了的。

许多这类过程都可以用费马(Fermat)、莱布尼兹(Leibniz)和牛顿(Newton)的魔术般的技巧即微积分去套公式求解。在十七世纪，一个懂得微积分的人恐怕会因具备这种非

凡的知识而被认为是姣姣者，然而在今天，微积分已经是高中和中科学校就能教授的科目了，它并不要求学生具有特殊的才能。

当你们学习微积分课的时候，将会发现这里用代数方法解决的许多问题，可以很容易地用微积分去做。因此，先用这里的具有巧智的方法解决它们，再用微积分的标准程序核对其答案，那将是一件挺有意思的事。

无论是微积分还是不等式理论，就其对极大与极小问题的应用而言，每一种技巧都各有其利弊。更确切地说，数学的特点正是：在任何特定问题的解法当中，应当有许多相互交迭的技巧。通常，一个问题能用一种方法解决，也就能用其它好几种方法解决。

5.2 黛斗(Dido)问题

据传说，迦太基(Carthage)城是由泰雅(Tyre)国的一位公主黛斗建造的。在寻找新的安身之地时，她从当地人那里租借了一块地，双方商定这块地至多占有能被一张牛皮所包围的地面。当她意识到若照字面上去做，其结果将拥挤不堪时，便非常巧妙地把牛皮切成许多细窄条，然后把它们串起来，结果围成了比当地人所设想的一块牛皮面积要大得多的地域。

她所面临的数学问题就是求一条有固定周长的封闭曲线，使它所围成的面积最大；见图5.1。

要讨论这个问题的一般形式，对于我们是过于复杂了。事实上，就我们现有的水平来说，甚至还不知道怎样用准确的词句去阐述这个问题。因为无论是表达一条任意曲线的周长，或是表达这条曲线所围成的面积，我们都还没有办法。微积分对这些量给出了定义，并且规定了解析表达式，一个

更高深的叫做变分法的数学分支提供了问题的解答。

也许你会猜到，黛斗问题的最理想曲线是一个圆周。然而在这里，让我们集中到这个问题的某些简单形式上来，我们能很容易地用已经在不等式理论中所得到的基本结果来处理它们。如果你想学得更深一些，那么可以读一读这套丛书中的 N.D. 卡扎里诺夫著的饶有趣味的小册子《几何不等式》。

5.3 黛斗问题的简化形式

我们设想，考虑到各种实际情况，黛斗只限于选择一块矩形的土地，如图5.2所指出的那样。

图5.1 黛斗问题

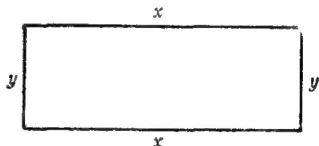


图5.2 黛斗问题的简化形式

用 x，y 分别表示矩形的两条边长，于是矩形周长由如下的代数表达式

$$L = 2x + 2y \tag{5.1}$$

给出，矩形面积由公式

$$A = xy \tag{5.2}$$

表示。因为 x，y 表示长度，它们当然是非负的量，又周长 $2x + 2y$ 等于 L，这表明：x 与 y 必须满足不等式

$$\frac{L}{2} \geqslant x \geqslant 0, \qquad \frac{L}{2} \geqslant y \geqslant 0. \tag{5.3}$$

因此，面积 $A = xy$ 显然不能任意大。根据不等式(5.3)与表达式(5.2)，再利用第二章的定理2.5，我们看到，A 不能超

过数值 $L^2/4$，即有

$$\frac{L^2}{4} \geqslant xy = A。 \tag{5.4}$$

怎样确定最大面积的尺寸呢？

参照关于两个数量的算术中项与几何中项不等式，我们知道

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \tag{5.5}$$

对所有非负数 x，y 都成立。在这里，因为 $x+y=L/2$，所以不等式(5.5)化为

$$\frac{L}{4} \geqslant \sqrt{xy} \quad 或 \quad \frac{L^2}{16} \geqslant xy = A。 \tag{5.6}$$

我们看到，在(5.4)中得到的关于面积的第一个粗略的界限 $L^2/4$是可以大为"缩小"的。不过我们还能得到更进一步的结果。回想前面已经证明过的：当且仅当 $x=y$ 时，(5.6)中的等号成立。在我们的情况，这就意味着当且仅当 $x=y$ 时，达到新的上界。对于满足关系式(5.1)的所有其它非负数 x 与 y，相应的面积小于 $L^2/16$。

上面的分析告诉我们，在周长为 L 的矩形当中，没有一个矩形的面积能够超过 $L^2/16$。而实际上，当且仅当四边相等即都等于 $L/4$时，面积达到这个最大值。

这样，我们就用纯代数的方法，对一个众所周知而且直观上颇为明显的事实完成了证明，这个事实就是：周长一定时，面积最大的矩形是正方形。

5.4 逆问题

现在我们考虑面积一定时，矩形的周长何时最小的问题。这是原来问题的对偶问题或者逆问题。

回到等式(5.1)和(5.2)，便知我们现在希望在保持乘积 xy 有固定数值 A 的情况下，确定非负数 x 与 y，使表达式 $2x+2y$ 有最小值。

正如我们期望的那样，利用算术中项与几何中项不等式可以解决这个问题。由上面的关系式(5.5)，知

$$\frac{(x+y)^2}{4}\geqslant xy=A.$$

因此

$$x+y\geqslant 2\sqrt{A},$$

从而

$$L=2x+2y\geqslant 4\sqrt{A}.$$

于是可以断言，周长至少必须是 $4\sqrt{A}$，而实际上，当且仅当 $x=y=\sqrt{A}$ 时，达到这个最小值。这样，我们又一次得知，最理想的矩形的形状是正方形。

这两个问题之间的这种交互关系不是偶然的。通常，在这类变分问题的研究中，一个问题的解也自动地产生出其对偶问题的解。关于对偶原理的证明，可以参见前面提到过的 N.D.卡扎里诺夫的《几何不等式》.

5.5 光线的路径

假设我们想决定光线从点 P 经平面反射到点 Q 所走的路径，如图5.3所示。显然，这里的问题实际上是一个三维问题，但是下面的分析表明：光线必定在过 P，Q 两点且垂直于反射平面的那个平面内传播。

我们假定媒质是均匀的，因此光线以匀速传播。应该怎样确定点 R 及路径 PR 与 RQ 呢？我们援引费马原理。这个

原理说，对于所有可能选择的点R，所需要的总时间必须最少。又，因为媒质是均匀的，这就意味着路径PR与RQ是直线，而且点R位于使$PQ+RQ$的长度取最小值的地方。

假设P，Q两点的坐标分别为$(0,a)$，(q,b)，并设r为未知距离OR。那么

$$OP=a,\quad TQ=b,\quad OR=r,\quad RT=q-r,$$

且

$$PR=\sqrt{a^2+r^2},\qquad RQ=\sqrt{b^2+(q-r)^2};$$

见图5.4。现在的问题是确定r，使得$PR+RQ$最小，即

$$\sqrt{a^2+r^2}+\sqrt{b^2+(q-r)^2}$$

最小。

图5.3 一条被反射的光线的路径

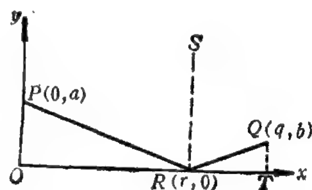


图5.4 点R的确定

应用三角形不等式，有

$$\sqrt{a^2+r^2}+\sqrt{b^2+(q-r)^2}\geqslant\sqrt{(a+b)^2+(r+q-r)^2}$$
$$=\sqrt{(a+b)^2+q^2}.$$

因此，传播距离不能小于固定量$\sqrt{(a+b)^2+q^2}$；并当且仅当(a,r)与$(b,q-r)$成比例而且比例常数是一个正数，也就是

$$\frac{a}{r}=\frac{b}{q-r}>0 \qquad (5.7)$$

时，这个距离确实达到最小值。

条件(5.7)在几何上意味着直角三角形 ORP 与 TRQ 相似，而且因为 b 与 $q-r$ 都是正数，所以 R 落在 O 与 T 之间。从这两个直角三角形的相似性，可以断定角 ORP 与角 TRQ 相等。因此它们的余角 $\angle SRP$ 与 $\angle SRQ$ 相等。这样就从费马原理推出了著名的结果：入射角等于反射角，即

$$\angle SRP=\angle SRQ,$$

以及一个更加明显的事实：R 介于 O 与 T 之间。

以上反射原理也能用纯几何的想法来证明。在图5.5中，如果 R' 表示 x 轴上不同于 R 的任意一点，Q' 是点 $(q,-b)$，那么

$$\begin{aligned}PR+RQ&=PR+RQ'=PQ'<PR'+R'Q'\\&=PR'+R'Q,\end{aligned}$$

这样我们再次看出 R 是使距离 $PR+RQ$ 取最小值的点。

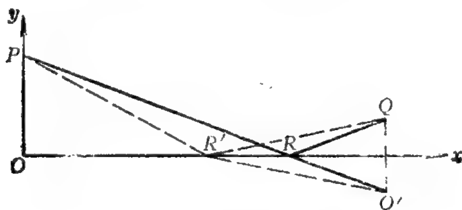


图5.5 点R的纯几何确定

假设一张平面把同类媒质分成密度不同的两部分 M_1 与 M_2，那么光线在 M_1 内以速度 v_1 沿直线传播，而在 M_2 内以速度 v_2 沿直线传播。我们要确定从 M_1 内的点 P 到 M_2 内的点 Q 耗时最少的路径；见图5.6。易知

$$PR=\sqrt{a^2+r^2}, \qquad RQ=\sqrt{b^2+(q-r)^2},$$

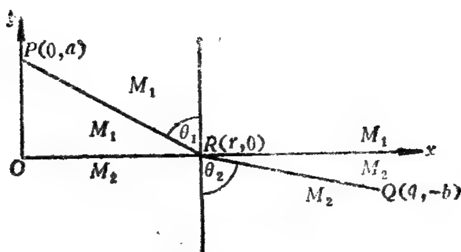


图5.6　一条被折射的光线

我们希望时间(距离/速度)

$$t=\frac{\sqrt{a^2+r^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(q-r)^2}}{v_2}$$

取最小值。

虽然在微分学中这是一个很容易的问题,但是在这里,最小值却不能直接从初等不等式得到。如果从P到Q的路径是这样的一条折线(见图5.6):角θ_1,θ_2(分别是PR与该平面的法线之间的夹角,以及RQ与这条法线的夹角)满足关系式

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2},$$

那么就得到了t的最小值。这个关系式就是大家所知道的斯涅耳(Snell)折射法则。

5.6　黛斗问题的简化的三维形式

现在考虑这样一个问题:在表面积一定时确定长方体,使其体积最大。用x,y,z表示三边的长度,便知这体积由表达式

$$V=xyz$$

给出,表面积由公式

$$A=2xy+2xz+2yz$$

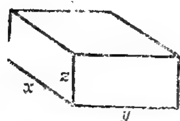


图5.7　简化的黛斗问题的三维形式

表示。

给定A，要求选择x,y,z，使V尽可能地大。为了分析这个问题，我们再次利用算术中项与几何中项不等式。

把xy,xz及yz看作三个非负数，便得到不等式

$$\frac{xy+xz+yz}{3}\geqslant[(xy)(xz)(yz)]^{1/3}=(xyz)^{2/3}。\quad(5.8)$$

我们知道，当且仅当

$$xy=xz=yz$$

时，等号成立；后面这个关系式当且仅当

$$x=y=z$$

时成立。因为

$$xy+xz+yz=\frac{A}{2},$$

所以由不等式(5.8)得到

$$\frac{A}{6}\geqslant(xyz)^{2/3}=V^{2/3}\quad 或者\quad \left(\frac{A}{6}\right)^{3/2}\geqslant V。$$

由此可知，表面积为A的长方体的体积小于或者等于$(A/6)^{3/2}$，并当且仅当

$$x=y=z=\left(\frac{A}{6}\right)^{1/2}$$

时，达到这个值。

因此，表面积给定时，体积最大的长方体是立方体；而且，对偶地，体积给定时，表面积最小的长方体是立方体。我们再次看到了两个问题之间的交互关系。

习　题　一

1. 证明：如果一个长方盒十二条棱的长度之和是一个固定值E，那么这个盒的表面积A至多为$E^2/24$，并且证明：

当且仅当$E^2/24=A$时，这个盒子是一个立方体。

2. 叙述并证明第1题的逆问题。

3. 在对角线有相同长度的所有长方形中，试确定哪一个周长最大，哪一个面积最大(利用第2.8节后面习题中第3题及第4.3节后面习题中第3题的结果)。

5.7 周长一定时面积最大的三角形

现在我们来考虑这样一个问题：对于给定的周长，确定出面积最大的三角形。在图5.8中，令s表示三角形的半周长，

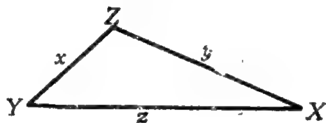


图5.8 关于一个三角形的黛斗问题

即令

$$s=\frac{x+y+z}{2}.$$

众所周知，三角形的面积A可用公式

$$A=[s(s-x)(s-y)(s-z)]^{1/2}$$

表示。我们希望求出：当s固定，而x,y,z取遍所有满足关系式

$$2s=x+y+z$$

的正数时，面积A的最大值。

我们将看到，再次利用算术中项-几何中项不等式可以非常简单地解决这个问题。对于$s-x,s-y,s-z$这三个非负数，我们有

$$[(s-x)(s-y)(s-z)]^{1/3}\leqslant\frac{(s-x)+(s-y)+(s-z)}{3}$$

$$=\frac{3s-(x+y+z)}{3}=\frac{3s-2s}{3}=\frac{s}{3}.$$

因此

$$(s-x)(s-y)(s-z)\leqslant\left(\frac{s}{3}\right)^3. \qquad (5.9)$$

从(5.9)，经简单几步，便得结果

$$A=[s(s-x)(s-y)(s-z)]^{1/2}\leqslant\left[s\left(\frac{s}{3}\right)^3\right]^{1/2}$$

$$=\left(\frac{s^4}{3^3}\right)^{1/2}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

当且仅当

$$s-x=s-y=s-z,$$

即$x=y=z$时，其中等式成立。因此可以断言：

定理5.1 在周长一定的所有三角形当中，等边三角形面积最大。

迄今为止本章得到的所有结果似乎说明，对称性和最优性是紧密相连的。也许基茨(Keats)的深邃的、美学的洞察对此作了很好的总结："美就是真，真就是美。"

习 题 二

1．设三角形三边长为x,y,z，用s表示半周长，A表示面积，因此

$$s=\frac{x+y+z}{2}$$

且
$$A^2=s(s-x)(s-y)(s-z)。$$

对于$y=z$，即等腰三角形的情形，用I表示面积；对于$x=y=z$，即等边三角形的情形，用E表示面积。证明

$$I^2=\frac{s}{4}x^2(s-x) \quad 及 \quad E^2=\frac{s^4}{27}。$$

2． 利用第1题的表示法，证明：对于有相等的半周长s的三角形，有结果

$$E^2-I^2=\frac{s}{27}(s+3x)\left(s-\frac{3x}{2}\right)^2$$

及

$$I^2-A^2=\frac{s}{4}(s-x)(y-z)^2,$$

这里x是等腰三角形的底边长，也是一般三角形的一条边长。

3． 利用第2题中的公式证明：

$$E^2-I^2\geqslant 0 \quad 及 \quad I^2-A^2\geqslant 0。$$

在什么情况下等号成立？

4． 利用第3题中的一个不等式证明：若给定了周长及一条边长，则等腰三角形面积最大。

5． 利用第3题中的一个不等式证明：在周长给定的所有等腰三角形当中，等边三角形面积最大。

6． 利用第3题中的不等式解释：公式

$$A=\sqrt{E^2-(E^2-I^2)-(I^2-A^2)}$$

是怎样用一些非负表达式来表示A的，第4题、第5题和定理5.1所叙述的结果，又可以怎样从这个公式推出来。

7. 在斜边长度相等的所有直角三角形中，确定一个直角三角形，使其斜边上的高最大。

5.8 富裕的橄榄球运动员

现在考虑一个稍微复杂一些的问题。

一个橄榄球运动员成功地利用他在橄榄球场上的体育才能，在华尔街占了一席之地。从那时起，经过通常的各个阶段，他拥有了大量的股票和债券，最后成了富翁。出于感情上的考虑，象许多退休的橄榄球运动员所习惯的那样，他在遗嘱里规定要把自己安葬在一个巨大的橄榄球形状的墓穴里。为了尊重他最后的要求，几位遗嘱执行人面临着以最经济的方式执行这项任务的问题。

经过思考之后，他们断定，与实际情况最接近的数学问题是，将尺寸一定的长方体装进一个体积尽可能小的椭球内。

由前面那些问题的启发，他们从逆问题开始，即在一个给定的椭球中，内接一个体积尽可能大的长方体。

根据立体解析几何，中心在原点，其轴沿着三个坐标轴的椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (5.10)$$

其中$2a,2b,2c$表示该椭球的三个轴的长度。直观上很清楚，内接长方体的中心应该在原点，各边应平行于各坐标轴。因此，如果长方体的一个顶点在该椭球表面上的点(x,y,z)处（见图5.9，图中给出椭球的八分之一），那么其余七个顶点必定位于各个不同的对称位置，这就意味着，它们的坐标分别是

$$(-x, y, z),\quad (x, -y, z),\quad (x, y, -z),\quad (-x, -y, z),$$
$$(x, -y, -z),\quad (-x, y, -z),\quad (-x, -y, -z).$$

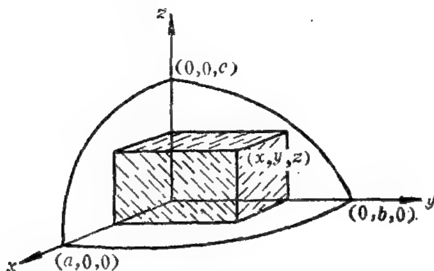


图5.9 椭球内长方体的八分之一

因为这个盒子三边长度为$2x, 2y, 2z$，所以盒子的体积由表达式

$$V = 8xyz \tag{5.11}$$

给出。我们面临的问题是，在x, y, z满足(5.10)的条件下，使表达式(5.11)取最大值。

这个问题很容易再次利用算术中项-几何中项不等式来解决。根据这个不等式，我们有

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \geqslant \left(\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}\right)^{1/3}. \tag{5.12}$$

利用方程(5.10)及公式(5.11)，不等式(5.12)可化为

$$\frac{1}{3} \geqslant \frac{V^{2/3}}{4(a^2b^2c^2)^{1/3}} \quad 或 \quad \frac{4}{3}(abc)^{2/3} \geqslant V^{2/3}.$$

由此可知，盒子的体积至多为$8abc/3\sqrt{3}$；而且，由(5.12)中等号成立的条件知，当且仅当

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$

或者

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad c=\frac{c}{\sqrt{3}} \tag{5.13}$$

时，达到这个值。

对于给定了三个半轴a,b,c的椭球来说，(5.13)这组值提供了所要求的长方体尺寸。

现在转到原来的问题.我们已经知道，对于给定的值a，b,c来说，(5.13)中x,y,z的值给出了体积最大的长方体的各边长度的一半。但是，另一方面，对于给定的值x,y,z，数值

$$a=\sqrt{3}\,x,\quad b=\sqrt{3}\,y,\quad c=\sqrt{3}\,z \tag{5.14}$$

是否给出了包含着长方体的体积最小的椭球呢？也许是那些遗嘱执行人目光敏锐，也许只是碰巧，无论如何，他们的数学预感却是对的。下面来证明这个事实。

椭球(5.10)的体积W由公式

$$W=\frac{4}{3}\pi abc$$

给出，对于给定的正数x,y,z，我们要选择满足方程(5.10)的正数a,b,c，使得W取最小值。

为了看出两个问题之间的互反关系，考虑倒数是比较方便的；另外，按照习惯总是用字母表中前几个字母表示已知量，用后几个字母表示未知量，而现在x,y,z是已知的，a，b,c是需要确定的，因此我们令

$$a=\frac{1}{X},\quad b=\frac{1}{Y},\quad c=\frac{1}{Z};$$

$$x=\frac{1}{A},\quad y=\frac{1}{B},\quad z=\frac{1}{C}. \tag{5.15}$$

这样，方程(5.10)变成

$$\frac{(1/A)^2}{(1/X)^2}+\frac{(1/B)^2}{(1/Y)^2}+\frac{(1/C)^2}{(1/Z)^2}=1,$$

或者

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1; \qquad (5.10')$$

我们要在这一限制下选择X,Y,Z，使

$$W=\frac{4}{3}\pi abc$$

取最小值。因为系数$4\pi/3$是一个常数，所以，使W取最小值等价于使

$$abc=\frac{1}{XYZ}$$

取最小值，后者又等价于使

$$V'=8XYZ \qquad (5.11')$$

取最大值。但是，这恰好是我们已经解决了的问题，即在一个给定的椭球中，确定一个体积最大的内接长方体的问题。由(5.10′)所表示的椭球以及体积为(5.11′)的长方体，与上面所说的橄榄球运动员并沒有实在联系，但是这无关紧要；事实上，它们只是用来强调并戏剧性地表现纯粹数学分析的重要性的。由等式(5.13)知，这个问题的解答是

$$X=\frac{A}{\sqrt{3}}, \qquad Y=\frac{B}{\sqrt{3}}, \qquad Z=\frac{C}{\sqrt{3}}. \qquad (5.13')$$

把(5.15)代入(5.13′)，便得到(5.13)和(5.14)。

考虑一个特定的情形：长$2x$为6英尺，宽$2y$为2英尺，高$2z$为1英尺，于是我们得到包含这个长方体的体积最小的椭球尺寸为

$$a=3\sqrt{3}, \quad b=\sqrt{3}, \quad c=\sqrt{3}/2.$$

由于椭球墓穴弯曲的缘故，在这位橄榄球运动员的安息之地，总有充裕的空间来安放几个用旧了的橄榄球，以陪伴我们的橄榄球场上的英雄。

5.9 切线

下面我们应用不等式理论去求给定曲线的切线。当然，目前我们只能以直观的方式来做这件事，因为关于一条曲线在一个点的切线的任何精确定义都超出了我们论述的范围。

考虑由方程$y=f(x)$所确定的曲线，如图5.10所示，并考虑方程为

$$mx+ny=k \tag{5.16}$$

的直线，这条直线与上述曲线交于P,Q两点。平行移动这条直线(即只改变直线方程(5.16)中k的数值)，直到P,Q两点在R点重合，如图5.11所示。于是直线$mx+ny=k'$可以称为曲线$y=f(x)$在点R处的切线。应当指出，这里只是按照一种直观的方式来做的，并没有试图建立切线的精确概念。但是，你们至少熟悉圆周的切线，并且可以看出这种做法在圆周的特殊情形下，确实导致所需结果。

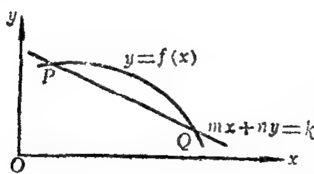


图5.10 曲线与割线

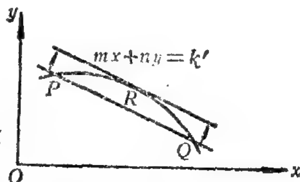


图5.11 曲线与切线

为了确定一个椭圆在给定方向的切线，我们利用上述做法和不等式的理论。设椭圆(见图5.12)由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

给出，并设点(x_1,y_1)为形如$mx+ny=k$的直线族与该椭圆的两个切点中的一个，这里m,n是固定的，$m^2+n^2\neq0$，k取遍所有的值。很明显，此切点可用下列方式来刻划：

(a) 点(x_1,y_1)在椭圆上；即数值x_1,y_1满足方程

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \tag{5.17}$$

(b) 点(x_1,y_1)在直线上；即数值x_1,y_1满足方程

$$mx_1+ny_1=k.$$

(c) 当k变化时，对于所有满足条件(a)与(b)的点(x_1,y_1)来说，从原点到直线$mx+ny=k$的距离取最大值。

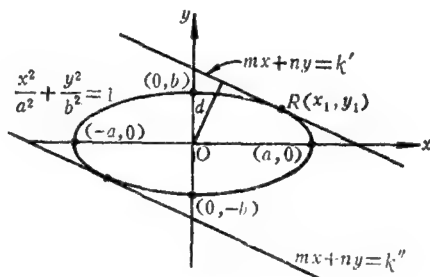


图5.12 椭圆及其两条切线

从原点到直线$mx+ny=k$的距离d由公式

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}} \tag{5.18}$$

给出。事实上，直线

$$mx+ny=k \tag{5.19}$$

有斜率$-m/n$（见图5.13），因此，其过原点的垂线OP有

方程

$$y=\frac{n}{m}x。\tag{5.20}$$

解线性方程组(5.19)和(5.20)，便得 P 点的坐标为

$$x=\frac{km}{m^2+n^2},\qquad y=\frac{kn}{m^2+n^2}。$$

于是从原点到 P 点的距离为

$$d=OP=\left[\frac{k^2m^2}{(m^2+n^2)^2}+\frac{k^2n^2}{(m^2+n^2)^2}\right]^{1/2}$$

$$=\left(\frac{k^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}=\frac{|k|}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

再由条件(b)知 $k=mx_1+ny_1$，从而公式(5.18)得到了证明。

由此可知，确定切线的问题就是在条件(5.17)的限制下，对所有 x_1 及 y_1，求表达式(5.18)的最大值问题。

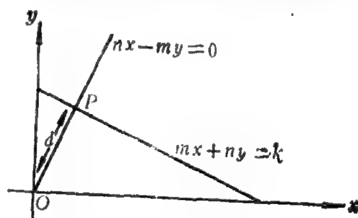


图5.13 距离公式

由哥西不等式的一个应用，即第四章第 4 节(a)中的不等式(4.38)，有

$$d=\frac{|mx_1+ny_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{|(am)(x_1/a)+(bn)(y_1/b)|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\leqslant\left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{a^2m^2+b^2n^2}{m^2+n^2}\right)^{1/2}。\tag{5.21}$$

切点由两个条件决定，即切点必须在椭圆上，从而(x_1, y_1)满足(5.17)；而且距离(5.18)必须达到它的最大值，从而（5.21)中的等号成立，这等价于

$$\frac{x_1/a}{am}=\frac{y_1/b}{bn}. \tag{5.22}$$

解线性方程组(5.17)和(5.22)，得到

$$x_1=\pm\frac{a^2m}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}},$$

$$y_1=\pm\frac{b^2n}{(a^2m^2+b^2n^2)^{1/2}}, \tag{5.23}$$

这里x_1与y_1同取正号，或者同取负号，而且所需要的常数k的值k'与k''（见图5.12）可以通过将x_1, y_1代入(5.19)而得到。这样就求得了椭圆在给定方向的切线。

5.10 切线(结束)

再稍微多化一点力气，我们就能得到一个更加漂亮的结果，即解决这样一个问题：求一椭圆在其上一给定点而不是在一给定方向的切线。

这里需要通过x_1, y_1去解m, n，而不是通过m, n去解x_1, y_1。这问题很简单！由方程(5.22)，知必有

$$m=\frac{rx_1}{a^2}, \qquad n=\frac{ry_1}{b^2},$$

其中r是某个待定的比例常数。将这里的m，n代入方程$mx+ny=k$，便得到形如

$$\left(\frac{rx_1}{a^2}\right)x+\left(\frac{ry_1}{b^2}\right)y=k$$

或者

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{k}{r}$$

的切线方程。注意，一方面(x_1,y_1)是这条切线上的点，另一方面它也是椭圆上的点，即(x_1,y_1)满足方程(5.17)，因此必有$k/r=1$。于是我们得到了一个非常简单而且巧妙的结果，即椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

在其上一点(x_1,y_1)处的切线方程为

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

正如你们在学习微积分时将会看到的，人们利用导数得到了同样的结果。

习 题 三

1. 试确定在$(5,-3)$，$(3,5)$与$(7,0)$这三点当中，哪些点在下述的椭圆上：

$$\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1.$$

2. 对$x=2$，求y的值，使得点(x,y)在第1题中的椭圆上。再对$x=2$确定y值，使得(x,y)既在这个椭圆内又在这个椭圆上。

3. 对第1题中的椭圆，求过椭圆上点$(-5,3)$的切线方程。

4. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ mx+ny=k,\end{cases}$$

其中a, b, m, n是固定数，选择k的值，使所得到的二次方程有一对重根(你们将发现$k^2 = a^2m^2 + b^2n^2$)。试把答案与本章第5.9节末尾所给出的数值x_1, y_1相比较。

第六章　距离的性质

6.1　欧氏距离

大家所熟悉的Oxy平面上两点$P(x_1,y_1)$与$Q(x_2,y_2)$之间的距离称为欧氏距离，记作$d_2(PQ)$，由公式

$$d_2(PQ)=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2} \qquad (6.1)$$

给出。

下面列举距离函数的某些性质。

1.　两点间的距离只依赖于这两个点的相对位置；即只依赖于它们坐标的差x_2-x_1及y_2-y_1。这个性质(即当这两个点沿同一方向移动同样的距离时，它们之间的距离不变)称为平移不变性。

2.　从点P到点Q的距离等于从点Q到点P的距离。这可以通过在(6.1)中验证

$$d_2(PQ)=d_2(QP)$$

看出来。性质 2 通常称为距离函数的对称性。

3.　距离函数(6.1)满足三角形不等式

$$d_2(PR)\leqslant d_2(PQ)+d_2(QR),$$

见第4.6节。

4.　任意两点P与Q间的距离是非负的。即

$$d_2(PQ)\geqslant 0;$$

当且仅当P与Q两点重合时，等号成立。这个性质常常称为距离函数的正性；这一点由定义(6.1)立即可得。

5.　如果P点坐标为(x,y)，Q点坐标为(ax,ay)，其中a为一非负常数，那么

$$d_2(OQ)=ad_2(OP);$$

这里O表示原点(0,0)。这个性质有时称为距离函数的齐次

性，它成立是因为

$$d_2(OQ)=[(ax)^2+(ay)^2]^{1/2}=[a^2(x^2+y^2)]^{1/2}$$
$$=a(x^2+y^2)^{1/2}=ad_2(OP).$$

欧氏距离还有另一个性质：

6． 若Oxy平面绕原点旋转某个角度，则两点间的欧氏距离保持不变。这个性质有时称为旋转不变性。

6.2 城市街区距离

还可以定义许多其它有用而且有趣的“非欧”距离。为了能称之为“距离”，P，Q的一个函数必须具有我们刚刚对熟知的距离(6.1)所验证过的性质1到性质5。唯有欧氏距离d_2具有全部的6条性质。

作为一个例子，可以考虑用你们城里两地$P(x_1,y_1)$与$Q(x_2,y_2)$之间道路的实际长度来虚构一个“城市街区距离”。假定所有的街道或者是严格南-北向的，或者是严格东-西向的，而且没有空地可以穿行；见图6.1。

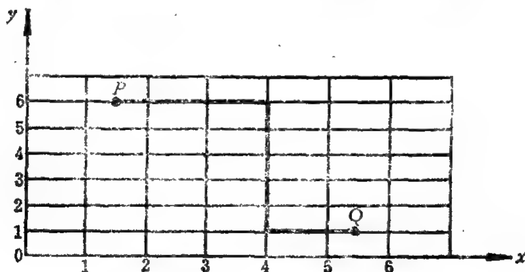


图6.1 城市街区距离

从P到Q的任何道路无一例外地只能由水平段落及竖直段落组成，这样我们所要通过的距离$d(PQ)$就由从P到Q的这条道路的所有水平距离与竖直距离之和组成。因此，我们定义

城市街区距离为

$$d_1(PQ)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|。\qquad (6.2)$$

严格说来，这式子有时不能表示城市街区距离。图6.2就是一例。那里的P，Q两地位于相同的两条南-北向(或东-西向)街道之间。这时，行人在其行程中被迫要往回走，于是实际经过的距离比(6.2)式右边的值要大些。但是，如果街区非常小，也就是说街道之间靠得很近，那么(6.2)就相当精确了。更确切地说，如果仅限于沿着东、南、西、北这四个主要方向行走而不必走回头路，那么新的距离函数(6.2)就是从P到Q所要经过的最小距离。因此，城市街区距离毕竟为我们提供了定义新的"非欧"距离的实际背景。

下面我们来看看由(6.2)所定义的d_1是否具有距离所要求的5条性质。

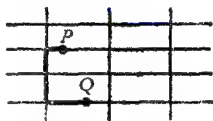


图6.2 城市街区距离，例外的情形

因为表达式(6.2)中只包含坐标的差，所以新的距离当然是平移不变的，因而具有性质1。

因为$d_1(PQ)=d_1(QP)$，所以d_1是对称的，这样也就具有性质2。

为了建立三角形不等式

$$d_1(PR)\leqslant d_1(PQ)+d_1(QR),$$

设P，Q，R的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，则

$$\begin{aligned}d_1(PR)&=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|\\&=|x_1-x_2+x_2-x_3|+|y_1-y_2+y_2-y_3|;\end{aligned}$$

由第三章第3.8节定理3.2知

$$|x_1-x_2+x_2-x_3|\leqslant|x_1-x_2|+|x_2-x_3|,$$

$$|y_1 - y_2 + y_2 - y_3| \leqslant |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|,$$

于是我们有

$$d_1(PR) \leqslant |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$
$$= d_1(PQ) + d_1(QR).$$

城市街区距离当然也满足第4个条件，因为任何实数的绝对值总是非负的。除非P与Q重合，否则它总是正的。

性质5很容易验证，事实上，对于$a \geqslant 0$，有

$$|ax| + |ay| = a[|x| + |y|].$$

下面，我们设法把圆周的概念从欧氏几何推广到城市街区几何。在欧氏几何中，圆周是与一个定点等距离的点的轨迹。让我们把这个定义搬到新的几何中来。根据(6.2)，中心在原点$O(0,0)$的"单位圆"由方程

$$d_1(OP) = |x| + |y| = 1$$

给出。在普通的欧氏平面内，它的图形由图6.3表示(见图3.14)。

6.3 一些其它的非欧距离

现在我们定义原点O与任意一点P之间的"距离"为

$$d_p(OP) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, \quad (6.3)$$

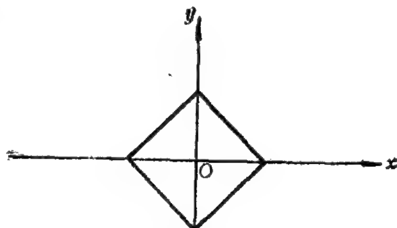


图6.3 城市街区几何中的单位圆

其中$p \geqslant 1$为某个固定值。一般地，定义任意两点$P(x_1, y_1)$与$Q(x_2, y_2)$之间的距离为

$$d_p(PQ) = (|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p)^{1/p}. \quad (6.4)$$

下面来验证距离的5条性质。首先距离(6.4)当然是平移不变的。再者它是对称的，即$d_p(PQ)=d_p(QP)$。第三，三角形不等式可由第4.8节末尾的基于闵可夫斯基不等式的公式(4.53′)推出来。关于正性的性质4，由(6.4)知也满足；最后，对于$P(x,y)$与$Q(ax,ay)$，我们有

$$d_p(OQ)=[|ax|^p+|ay|^p]^{1/p}$$
$$=(a^p)^{1/p}[|x|^p+|y|^p]^{1/p}=ad_p(OP),$$

因此，距离d_p也具有性质5。

在现在的情形，“单位圆”(即与原点距离为1的点的轨迹)由方程

$$|x|^p+|y|^p=1$$

给出。其轨迹曲线依赖于p的值。例如，当$p=1$，就回到城市街区单位圆；对于$p=2$，又得到通常的欧氏单位圆。对于$p=1,2,4$我们有不等式

$$|x|+|y|\geqslant(|x|^2+|y|^2)^{1/2}\geqslant(|x|^4+|y|^4)^{1/4},$$

这个不等式很容易用两端平方来验证。相应的“单位圆”的欧氏图形如图6.4所示；对应于$p=1$的曲线被包围在$p=4$的曲线当中。一般地，对于由(6.3)所定义的距离而言，与任意固定的p值相对应的“单位圆”是否总包围着与较小p值相对应的单位圆呢？如果是这样，那么当p增大时，这些曲线

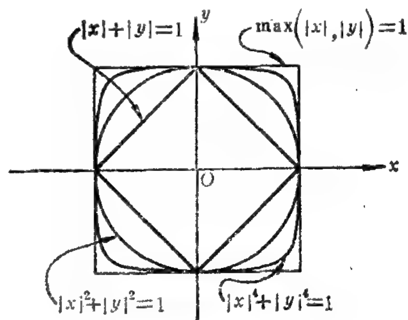


图6.4 非欧“单位圆”的欧氏图形

会变得越来越大吗？

为了回答第一个问题，我们先说明一个等价的问题：当$m \geqslant n \geqslant 1$时，不等式

$$[|x|^n + |y|^n]^{1/n} \geqslant [|x|^m + |y|^m]^{1/m}$$

是否成立？回答是肯定的。这里我们仅对$m=3, n=2$ 给出证明，一般情形留给读者作为一个习题。

为了避免书写过多的绝对值符号，我们引进

$$a = |x|, \qquad b = |y|,$$

于是需要证明

$$(a^2+b^2)^{1/2} \geqslant (a^3+b^3)^{1/3},$$

其中$a, b \geqslant 0$。将a^3+b^3写为

$$a^3+b^3 = aa^2 + bb^2,$$

并应用哥西不等式(其平方根形式)，便得到

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^4+b^4)^{1/2} \geqslant a^3+b^3. \qquad (6.5)$$

因为

$$a^2+b^2 \geqslant (a^4+b^4)^{1/2},$$

所以由(6.5)推出

$$(a^2+b^2)^{1/2}(a^2+b^2) \geqslant a^3+b^3,$$

或者

$$(a^2+b^2)^{3/2} \geqslant a^3+b^3,$$

因此有不等式

$$(a^2+b^2)^{1/2} \geqslant (a^3+b^3)^{1/3}.$$

对于任意有理数 $m \geqslant n \geqslant 1$，不等式的证明可以利用赫尔德不等式的一个相应的应用来完成。由以上讨论不难看出，当 p 趋近于 1 时，“单位圆”

$$|x|^p + |y|^p = 1, \qquad p > 1,$$

趋近于图6.3所示的正方形$|x|+|y|=1$。

为了看出当p越来越大时曲线将会怎样，我们注意到

$$\max\{|x|^p,|y|^p\}\leqslant|x|^p+|y|^p\leqslant2\max\{|x|^p,|y|^p\}. \tag{6.6}$$

又因为

$$[\max\{|x|^p,|y|^p\}]^{1/p}=\max\{|x|,|y|\},$$

所以由(6.6)得到

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant[|x|^p+|y|^p]^{1/p}\leqslant2^{1/p}\max\{|x|,|y|\}. \tag{6.7}$$

现在考虑当p变得非常大时，(6.7)右端的变化情况；p只出现在2的指数$1/p$里，当p变得非常大时，$1/p$就变得非常小，因此$2^{1/p}$趋近于$2^0=1$。换句话说，(6.7)告诉我们，当p"趋近于无穷"时，

$$d_p(OP)=[|x|^p+|y|^p]^{1/p}$$

趋近于距离

$$d_\infty(OP)=\max\{|x|,|y|\}. \tag{6.8}$$

可以证明d_∞具有距离的5条性质。

那么，"单位圆"

$$\max\{|x|,|y|\}=1$$

的形状是怎样的呢？它是一个正方形，四边有

$$\begin{aligned}|x|&=1, \quad 0\leqslant|y|\leqslant1,\\ |y|&=1, \quad 0\leqslant|x|\leqslant1.\end{aligned} \tag{6.9}$$

这样，我们看到，对于所有的$p\geqslant1$，

$$d_p(PQ)=[|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p]^{1/p}$$

可以作为距离函数，并且，当p增大时，"单位圆"

$$|x|^p+|y|^p=1$$

也增大，当p趋近于无穷时，它趋近于正方形(6.9)；尽管

这些“单位圆”越来越大，但它们永远不会越出这个正方形（见图6.4）。

在所有情况下，“单位圆”将 Oxy 平面分为两部分：由所有与原点的距离小于1的点组成的“单位圆”的**内部**；以及由所有与原点的距离大于1的点组成的**外部**。由不等式

$$d(OP)\leqslant 1$$

所定义的点集有时称为**单位圆盘**，而“单位圆”

$$d(OP)=1$$

是指这个单位圆盘的**边界**。

下面是几个一般性的评注。正如前面所指出的，欧氏距离在平移(性质1)及旋转(性质6)下不变，即在所谓**位移**或**刚体运动**下不变。上面讨论过的其它距离在平移下也不变，但是在旋转下要改变。事实上，由图6.4可以看出，当 Oxy 平面绕点 (x_1,y_1) 旋转45°时，城市街区距离 d_1 就变为距离

$$d_\infty=\max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}$$

(伸长了 $\sqrt{2}$ 倍)。可以证明(但此处不证)，欧氏距离完全被第6.1节中所列举的6条性质所刻划，也就是说，除前5条性质以外，还具有旋转不变性的唯一的距离就是欧氏距离。

6.4 单位圆盘

还有许多函数具有距离所要求的5条性质；我们只讨论了很少的几个。

现在考虑以下问题：在 Oxy 平面上给定一个由点组成的集合 S (我们称之为点集)，使得 S 的内部包含原点。我们问：在什么条件下它代表从属于某个距离 d 的单位圆盘？换句话说，在什么条件下，存在一个距离函数 d，对于它，S 恰好包含那些由不等式

$$d(OP)\leqslant 1$$

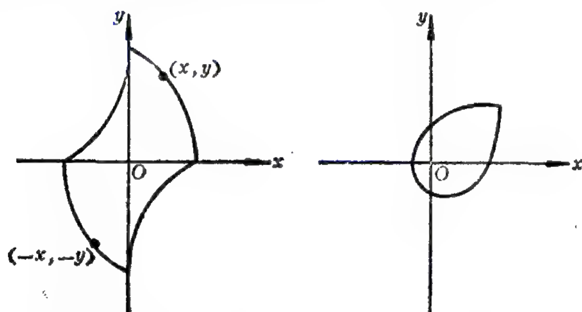
所刻划的点？

我们指出，对于一个给定的其内部包含着原点的点集 S，存在一个距离函数 d，使得 S 与其边界一起构成单位圆盘的充要条件是：

(a) 点集 S 关于原点对称；

(b) 点集 S 是凸的。

点集 S 关于原点对称是指：对于每一个属于 S 的点 (x, y)，点 $(-x, -y)$ 也属于 S。S 是凸的是指：连结 S 内任意两点的直线段全部落在 S 内。见图6.5(a)与(b)。



(a) 关于原点对称的点集　　(b) 凸点集

图6.5　平面上的点集

我们首先证明，若 d 为一距离函数，则性质(a)成立，即若 d 为一距离函数，S 为它的单位圆盘，则 S 必关于原点对称。换句话说，若 d 为一距离函数，而 $P(x,y)$ 满足 $d(OP)\leqslant 1$，则点 $Q(-x,-y)$ 也满足 $d(OQ)\leqslant 1$。

事实上，若 d 为一距离，则它是平移不变的；因此，如果把点 Q 及点 O 沿水平方向移动 x，沿竖直方向移动 y，那么它们的距离 $d(QO)$ 将保持不变。但是，这样的平移把点 Q 移到原点

O，又把原点 O 移到点 P，因此

$$d(QO)=d(OP)\leqslant 1,$$

又因为 d 是对称的，所以

$$d(OQ)=d(QO)\leqslant 1.$$

从而 Q 在单位圆盘内。

其次我们证明，若 d 为一距离函数，则性质(b)成立，即若 P 与 Q 为单位圆盘内任意两点，则线段 PQ 全部落在单位圆盘内。这个问题用符号表达就是：对于某个距离函数 d，给定任意两点 P,Q，使得

$$d(OP)\leqslant 1, \quad d(OQ)\leqslant 1,$$

并给定线段 PQ 上任意一点 R，要证明 $d(OR)\leqslant 1$。如果 $P=Q$ 或者 P,Q 中有一个在原点，那么结论显然成立，因此我们假设 O,P 与 Q 为不同的三点。

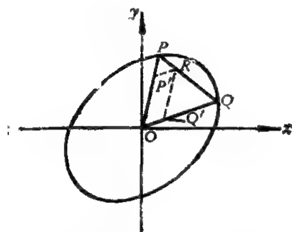


图6.6 单位圆盘的凸性

为了证明 $d(OR)\leqslant 1$，首先需要用一种方便的形式将 R 在 PQ 上面这一事实表达出来。设 $P'R$ 平行于 OQ，$Q'R$ 平行于 OP(见图6.6)，则有

$$d(OP')=ad(OP), \quad d(OQ')=bd(OQ), \qquad (6.10)$$

这里 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$。为了看出这一点，可以利用欧几里得的比例理论(相似三角形)。我们用同一符号 AB 表示欧氏线段及其长度，于是

$$a=\frac{OP'}{OP}=\frac{QR}{QP}, \qquad b=\frac{OQ'}{OQ}=\frac{PR}{PQ}, \qquad (6.11)$$

这里，用 a 与 b 简记两个比值，因此 a,b 为正数，再把这两个比值相加，便得到

$$a+b=\frac{QR+RP}{QP}=\frac{QP}{QP}=1.$$

因为P与P'位于过原点的同一条直线上，所以，它们的坐标成比例。再利用欧氏距离的性质5，便可从(6.11)推出：若P的坐标为(x_1,y_1)，则P'的坐标为(ax_1,ay_1)。类似地，因为Q与Q'位于过原点O的同一条直线上，所以，若Q的坐标为(x_2,y_2)，则Q'的坐标为(bx_2,by_2)。由于距离d具有性质5，因此

$$d(OP')=ad(OP),\quad d(OQ')=bd(OQ). \qquad (6.12)$$

最后，利用性质3（三角形不等式；见图6.6），得

$$d(OR)\leqslant d(OP')+d(P'R),$$

再由性质1，知$d(P'R)=d(OQ')$，于是

$$d(OR)\leqslant d(OP')+d(OQ').$$

将(6.12)代入此式，有

$$d(OR)\leqslant ad(OP)+bd(OQ),$$

又因为$d(OP)\leqslant 1, d(OQ)\leqslant 1$，以及$a+b=1$，所以

$$d(OR)\leqslant a+b=1,$$

根据定义便知点R在单位圆盘内。

至此我们证明了：若d为一距离函数，S为其单位圆盘，则S关于原点对称，并且S为凸集。我们还需证明其逆命题，即若S为其内部包含着原点的点集，并且S是凸的，又关于原点对称，则存在一个距离函数d，S为其单位圆盘。

下面我们仅指出可以怎样定义距离d，请读者自己验证d具有距离的5条性质。

设S为上述点集。如图6.7，令Z为平面上不同于O的任意一点。从O过Z引射线，设其与S的边界相交于点Z'（由S的凸性知此射线与S的边界恰有一个交点）。设欧氏距离

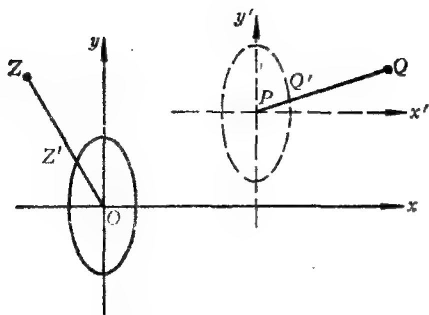


图6.7　$d(OZ)=\frac{OZ}{OZ'}$，　$d(PQ)=\frac{PQ}{PQ'}$

OZ 与 OZ' 的比值为

$$r=\frac{OZ}{OZ'},$$

并定义从 O 到 Z 的距离为这个比值，即

$$d(OZ)=r.$$

容易看出，$d(OZ)$ 小于 1、等于 1 或者大于 1 分别依赖于点 Z 是否为 S 的内点、边界点或者外点。

为了定义任意两点 P,Q 之间的距离 $d(PQ)$，可以按图6.7平移坐标轴，然后重复上面的做法。

通常的欧氏圆周其周长与直径的比用符号 π 表示，其值大约是3.14。下面习题的任务是计算某个非欧氏单位圆的非欧氏周长与非欧氏直径的比值 r。我们只举例分析一种特殊情形，其它几种简单情形留给读者去研究。

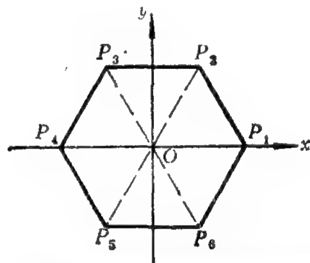


图6.8　关于坐标轴对称的正六边形

例　设 S 由一个关于坐标轴对称的正六边形的内点及边界点组成；见图6.8。因为 S 是凸的，而且关于原点对称，所以，它可以看成是某个距离函数 d 的单位圆盘。根据定义知，单位圆盘的非欧氏半径为 1，因此其直径为 2。为了计

算周长，我们注意到由于 d 的平移不变性，下面的关系式成立：

$$d(P_1P_2)=d(OP_3)=1, \qquad d(P_2P_3)=d(OP_4)=1,$$
$$d(P_3P_4)=d(OP_5)=1, \qquad d(P_4P_5)=d(OP_6)=1,$$
$$d(P_5P_6)=d(OP_1)=1, \qquad d(P_6P_1)=d(OP_2)=1.$$

把所有这些线段的长度相加，便知周长是 6 。因此所求比值为

$$r=\frac{6}{2}=3.$$

习 题 一

对下面的单位圆盘 S，计算非欧氏周长与非欧氏直径的比值：

1． S 为关于城市街区距离 $|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ 的单位圆盘；见图6.3。

2． S 为关于距离函数

$$d(OP)=\max\{|x|,|y|\}$$

的单位圆盘。

3． S 为中心在原点的一个正八边形的内点及边界点组成的单位圆盘。

4． S 为中心在原点的一个正十边形的内点及边界点组成的单位圆盘。

6.5 代数与几何

在前几节里，我们看到的是利用几何直观可以导出有趣的代数结果。在二维与三维的情形，这种技巧发挥得挺不错。然而，一旦我们转到 n 维几何的讨论($n\geq4$)，情形就反

过来了：我们往往依靠代数去给几何对象下定义，并推出几何结果。

下面简单地说明一下这个想法。我们把 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集合看作 n 维空间的一个点 P，两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 之间的欧氏距离定义为

$$d(PQ) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2]^{1/2}. \tag{6.13}$$

当 $n=2$，(6.13)就化为平面上两点 (x_1, x_2) 与 (y_1, y_2) 之间的距离，这是我们所熟知的。如果以 O 表示原点 $(0, 0, \cdots, 0)$，以 R 表示点 $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$，那么，$n$ 维三角形不等式

$$d(OP) + d(PR) \geqslant d(OR)$$

就是

$$[x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2]^{1/2} + [y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2]^{1/2} \geqslant [(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2]^{1/2}. \tag{6.14}$$

由第四章第4.6节知此不等式是成立的。

其次，我们定义直线 OP 与 OQ 之间夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}}. \tag{6.15}$$

根据哥西不等式(见第4.4节(d)，不等式(4.45))，知 $|\cos\theta| \leqslant 1$。

这样我们就具备了 n 维解析几何的基础。

符　号

$|a|$　a 的绝对值

N　所有负数的集合

O　数 0 这一个元素的集合

P　所有正数的集合

$\geqslant$　大于或等于

$\not\geqslant$　既不大于也不等于

$\leqslant$　小于或等于

$\not\leqslant$　既不小于也不等于

$\not\lessgtr$　既不大于也不小于

$\sqrt{\ }$　非负平方根

$\in$	属于	$>$	大于
$\overline{\in}$	不属于	$\not>$	不大于
$=$	等于	$<$	小于
$\neq$	不等于	$\not<$	不小于

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$　元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的集合

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$　$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的最大元素

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$　$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的最小元素

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}^+$　$\max\{0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

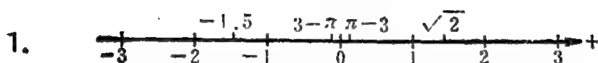
$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}^-$　$\min\{0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$\operatorname{sgn} x$　0，对 $x=0$；1，对 $x>0$；-1，对 $x<0$。

习 题 答 案

第 一 章

习 题 一

1. 

$-3<-2<-1.5<-1<3-\pi<0<\pi-3<\sqrt{2}<2<3$。

2. (a) $\in$； (b) $\overline{\in}$； (c) $\overline{\in}$； (d) $\overline{\in}$； (e) $\in$； (f) $\overline{\in}$； (g) $\in$； (h) $\overline{\in}$； (i) $\overline{\in}$； (j) $\overline{\in}$。

3. (a) N； (b) P； (c) P； (d) N； (e) P； (f) P； (g) P； (h) N； (i) P； (j) O。

4. (a) $<$； (b) $>$； (c) $>$； (d) $<$； (e) $>$； (f) $>$； (g) $>$； (h) $<$； (i) $>$； (j) $=$。

5. (a) T； (b) T； (c) T； (d) F； (e) T； (f) T； (g) F； (h) T； (i) F； (j) F。

6. 2，$\pi-3$，$-(3-\pi)^2$，$a/(c-b)$，0，$-\sqrt{b^2-4ac}$。

7. (a) $\geqslant$； (b) $\gtrless$； (c) $\leqslant$； (d) $>$； (e) $<$； (f) $=$。

8. $p>0$，$-n>0$，因此 $p-n>0$，$p>n$。

9. $a=b$。

10. 由假设，对 $n=1$ 正确；归纳步骤根据公理Ⅱ。

11. 在本文中已说明数 1 及 2 是“正的”，所以由公理Ⅱ知 $1+2=3$ 是“正的”。令 $a=1/3$；则 $3a=1$，因此 a 是“正”的，因为 3 及 1 是“正的”。于是由公理Ⅱ，$2a=2/3$是“正的”。

第　二　章

习　题　一

1. 先将$a/2<b/2$与$a/2=a/2$相加，再与$b/2=b/2$相加。
2. 这两个不等式都等价于 $(ad-bc)^2\geqslant 0$。
3. 等价于$(a-b)^4\geqslant 0$。
4. 对于$n=2$，本定理叙述为：若 $a_1\geqslant a_2$，则$a_1\geqslant a_2$，显然这是对的。假设定理对于n也正确，并设 $a_1\geqslant a_2$，…，$a_{n-1}\geqslant a_n, a_n\geqslant a_{n+1}$，那么 $a_1\geqslant a_n, a_n\geqslant a_{n+1}$，因此 $a_1\geqslant a_{n+1}$。当且仅当 $a_1=a_2,\cdots,a_{n-1}=a_n$，且 $a_n=a_{n+1}$ 时，等号成立。

习　题　二

1. 中间步骤：

$$\frac{2}{\sqrt{ab}}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

等式当且仅当$a=b$时成立。

2. 在第 1 题中，令$b=1/a$。当且仅当$a=1$时，等式成立。
3. 将 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$ 相加再除以 2。
4. 等价于$a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0$。
5. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 乘以 c，$b^2+c^2\geqslant 2bc$ 乘以 a，$c^2+a^2\geqslant 2ac$ 乘以 b，再相加。
6. 中间步骤：$(a^2-b^2)^2-(a-b)^4=4ab(a-b)^2$。
7. 中间步骤：$(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a+b)(a-b)^2$。
8. (3) $a=b=c$；　(4) $a=b$ 或者它们之中至少有一个等

于0； (5) $a=b=c$； (6) $a=b$或者它们之中至少有一个等于0；(7) $a=\pm b$。

习 题 三

1. 等价于$(a-b)^2\geqslant 0$。当且仅当$a=b\geqslant 0$时，等号成立。
2. 根据定理2.7和下面这一事实：c与d符号相同，a^c-b^c与a^d-b^d符号相同。再乘出来。当且仅当$a=b$时等号成立。
3. $a^2+b^2\geqslant 2ab$， $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$。
4. 这些不等式的等价性可以根据先乘以$bd>0$，再乘以$1/bd>0$来证明；见定理2.3。相应等式的等价性可用同样方法证明。
5. 把$1=1$加到不等式上去。等式$a/b=c/d$等价于$ad=bc$。
6. 应用带指数-1的定理2.7，并把$1=1$加到所得到的不等式上去，然后，再应用带指数-1的定理2.7。等号成立的条件与第5题一样。
7. 中间步骤：

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}\geqslant 0,$$

$$\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{bc-ad}{d(b+d)}\geqslant 0.$$

8. $30<33$； $22<25$； $18<21$； $42<45$。
9. 若$a<b$，$b<c$，则$a<c$。

   若$a<b$，$c<d$，则$a+c<b+d$。若$a<b$，c是任意实数，则$a+c<b+c$。

   若$a<b$，$c>0$，则$ac<bc$。若$a<b$，$c<0$，则$ac>bc$。

若$a<b$，$c<d$，则$a-d<b-c$。若$a<b$，c是任意实数，则$a-c<b-c$。

若$0<a<b$，$0<c<d$，则$ac<bd$。

若$0<a<b$，$0<c<d$，则$a/d<b/c$。特别地，对于$a=b=1$，若$0<c<d$，则$1/d<1/c$。

若$0<a<b$，m与n是正的有理数，又若$a^{1/n}$和$b^{1/n}$表示正的n次方根，则

$$a^{m/n}<b^{m/n} \quad 及 \quad b^{-m/n}<a^{-m/n}。$$

第三章

习题一

1. (a) -1； (b) π； (c) 0； (d) 4； (e) 3；
   (f) 0； (g) π； (h) 0； (i) 4； (j) 3。
2. (a) -7； (b) $\sqrt{2}$； (c) -7； (d) 0；
   (e) -3； (f) -7； (g) 0； (h) -7；
   (i) 0； (j) -3。
3. $(-1)(0)-(1)(0)=0$。
4. 根据max{　　}的定义，考虑有代表性的情况。
5. $\{a,b,c,d\}=\{-1,-1,-1,-1\}$。
6. $\{a,b\}^+$与$\{c,d\}^+$之中有一个等于$\{a,b,c,d\}^+$；另一个是非负的。
7. 第一和第三个不等式：一个附加的后补者可能是0。中间不等式：max{　　}和min{　　}的定义。否；对于第一个严格不等式来说，$a_1,a_2,\cdots,a_n$全体都是负的，对于第三个严格不等式来说，它们都是正的。
8. 以-1乘不等式$a\geqslant b,a\geqslant c$，并应用定理2.3。

9. $\{-a,-b\}^{-}=\min\{0,-a,-b\}$

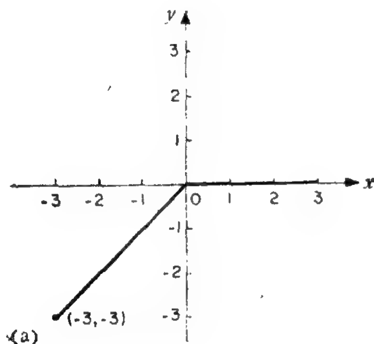
$$=-\max\{0,a,b\}=-\{a,b\}^{+}.$$

10. 根据 max{ }的定义，考虑有代表性的情况。

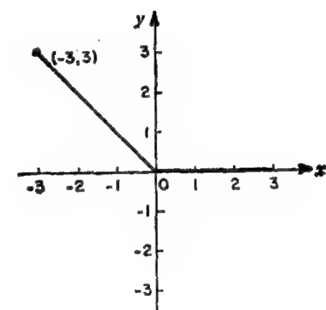
习 题 二

1. 对于每个实数 a，$-|a|\leqslant -a\leqslant |a|$。第一个等号当且仅当$a\geqslant 0$时成立，第二个等号当且仅当$a\leqslant 0$时成立。

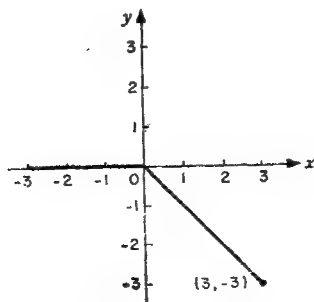
2.



(a)



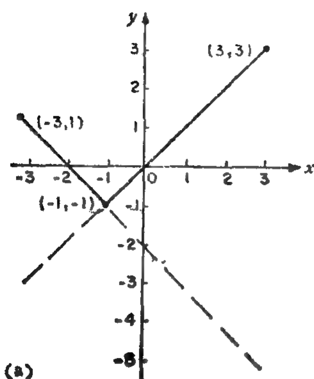
(b)

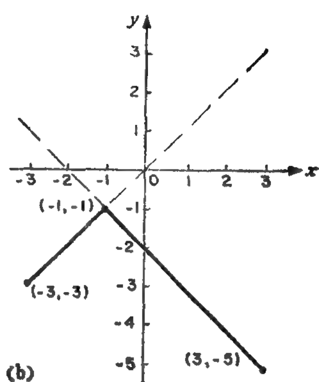


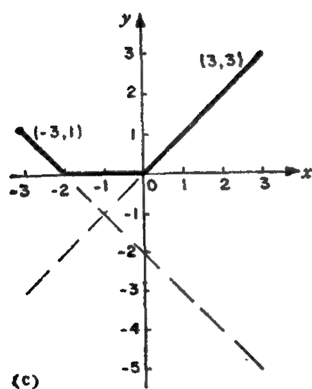
(c)

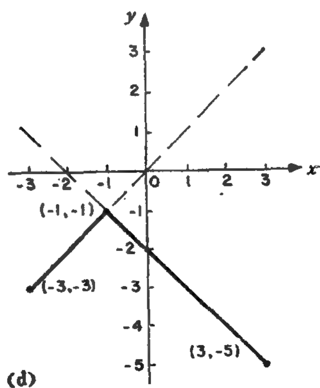
3. (a) 也是 (d),(g) 的图形； (b) 也是 (e),(h) 的图形； (c) 也是 (f),(i) 的图形。

4.

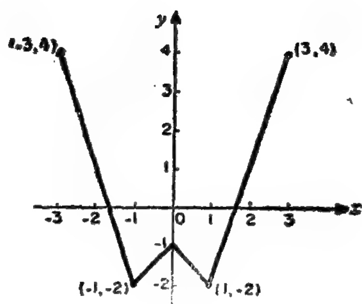








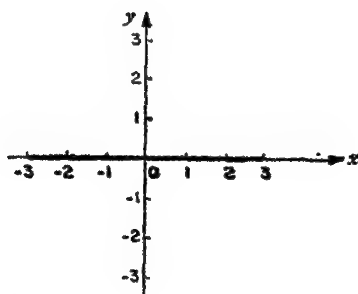
5.



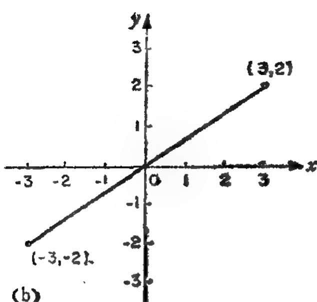
6. 图3.3，奇函数；　图3.4，奇函数；　图3.5，偶函数；
图3.6，偶函数。

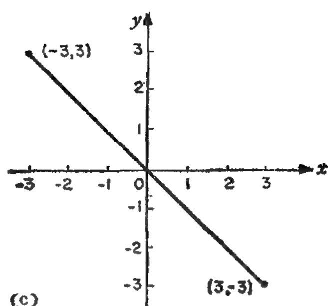
习 题 三

1.

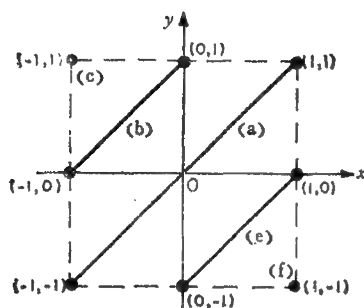


(a)



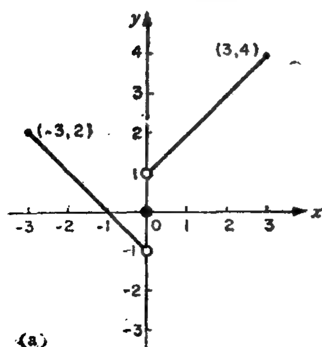


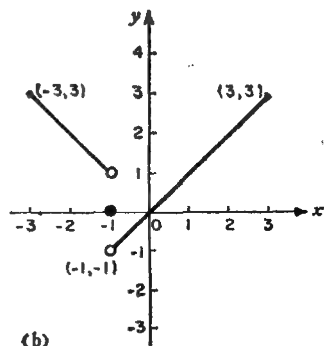
2.



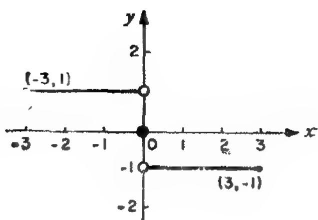
(d) 这部分很容易；沒有要做的事情。

3.



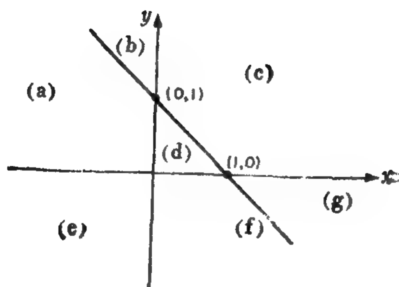


4.



习 题 四

1.



(a) $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$;

(b) $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 1$;

(c) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\geqslant 1$;

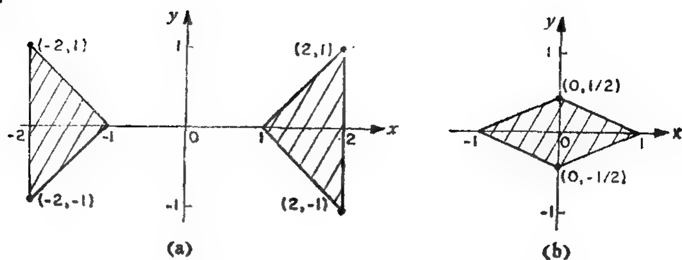
(d) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$;

(e) $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$, $x+y\leqslant 1$;

(f) $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, $x+y\leqslant 1$;

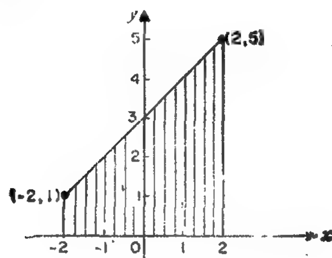
(g) $x\geqslant 0$, $y\leqslant 0$, $x+y\geqslant 1$.

2.



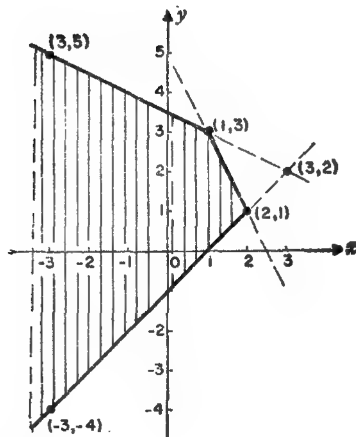
y
1
(-2,1)
(2,1)
-2
-1
0
1
2
x
(-2,-1)
(2,-1)
-1
(a)
y
1
(0,1/2)
-1
0
1
x
(0,-1/2)
-1
(b)

3.



y
5
(2,5)
4
3
2
(-2,1)
1
-2
-1
0
1
2
x

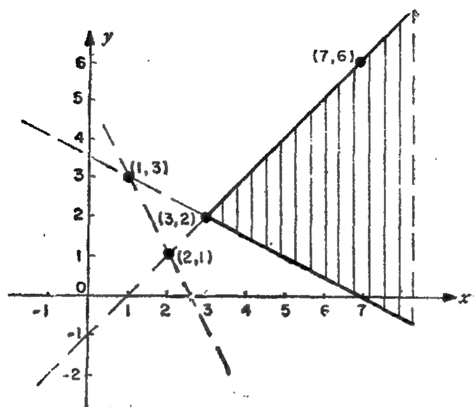
4.



y
(3,5)
5
4
3
(1,3)
2
(3,2)
1
(2,1)
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
-2
-3
-4
(-3,-4)

不完全的图形。

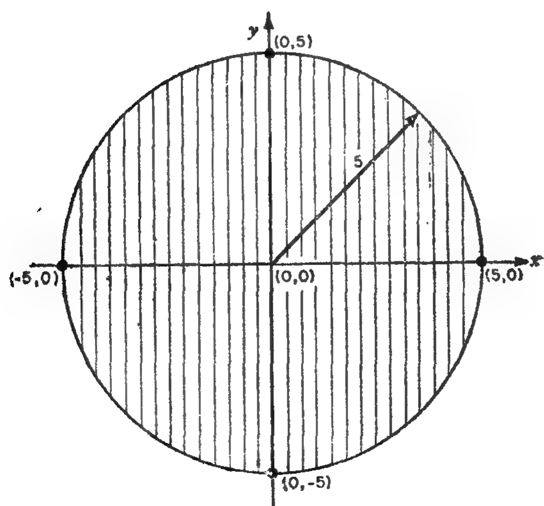
5.



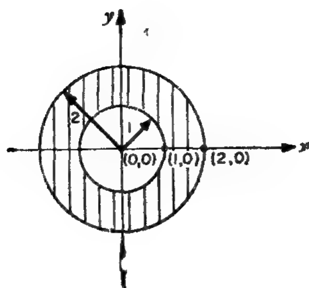
不完全的图形。

习 题 五

1.



2.



3. y 轴，$x=0$。在几何上，就是确定与 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 等距离的点的轨迹，在分析上，就是求解方程

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\,.$$

习 题 六

1. (a) $|-a|=\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=|a|$；

   (b) $|ab|=\sqrt{(ab)^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\cdot|b|$；

   (c) $\left|\frac{a}{b}\right|=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\frac{|a|}{|b|}$。

2. (a) $=$；　(b) $>$；　(c) $=$；　(d) $=$；　(e) $>$。

3. (a) $>$；　(b) $=$；　(c) $=$；　(d) $=$；　(e) $=$。

4. (a) $>$；　(b) $=$；　(c) $=$；　(d) $>$；　(e) $=$。

5. (a) $=$；　(b) $>$；　(c) $>$；　(d) $=$；　(e) $=$。

6. $\sqrt{(a-b)^2}\geqslant\sqrt{(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2}$，

   $(a-b)^2\geqslant(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})^2$，

   $a^2-2ab+b^2\geqslant a^2-2\sqrt{a^2b^2}+b^2$，

   $2\sqrt{a^2b^2}\geqslant 2ab$，　$|ab|\geqslant ab$。

7. 设 $a^2 \leqslant b^2$ 且 $ab \geqslant 0$，则

$$\min\{a^2, b^2\} = a^2 = |a| \cdot |a| \leqslant |a| \cdot |b| = ab.$$

8. 若$a \geqslant 0$，则$\sqrt{a^2} = a$；若$a < 0$，则$\sqrt{a^2} = -a > 0$。同样，若$a = 0$，则$\sqrt{a^2} = 0$，否则它是集合$\{a, -a\}$中取正値的那个元素；$\sqrt{a^2} = \max\{a, -a\}$；　$\sqrt{a^2} = \{a, -a\}^+$；$y = \sqrt{x^2}$的图形如图3.6所示；并且$\sqrt{a^2} = a \operatorname{sgn} a$。

第　四　章

习　题　一

1. (a) 4,5；　(b) 6,7.5；　(c) 6,6.5；　(d) 0,10.
2. (a) $3p, 5p$；　(b) $0, p/2$；　(c) $2p, p^2+1$.

习　题　二

1. $a + b =$ 直径 $= 2r$，因此 $r = (a+b)/2$；　由相似三角形知 $a/h = h/b$，从而$h = \sqrt{ab}$。
2. 为证明调和中项小于或等于几何中项，一个中间步骤是

$$ab(a-b)^2 \geqslant 0;$$

或者参见第 2.7 节后面习题的第 1 题。其中等号当且仅当 $a = b$ 时成立。为了证明调和中项小于或等于算术中项，可以利用算术中项-几何中项不等式；也可利用中间步骤

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

直接证明这个结论。

3. (a) 3.2, 4, 5；　(b) 4.8, 6, 7.5；　(c) 5.54^-, 6, 6.5；　(d) 5.83^+, 5.91^+, 6；　(e) 6, 6, 6.
4. 以每一种速度走一半距离：

$$\frac{d}{2}=r_1t_1=r_2t_2,\quad t_1=\frac{d}{2r_1},\quad t_2=\frac{d}{2r_2},$$

$$t=t_1+t_2=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$

$$d=rt=\frac{rd}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right),$$

$$r=\frac{2}{(1/r_1)+(1/r_2)}=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

以每一种速度走一半时间：

$$d=rt=\frac{r_1t}{2}+\frac{r_2t}{2},\qquad r=\frac{r_1+r_2}{2}.$$

由第 2 题的结果知以每一种速度走一半时间可以更快地到达。

5. 令$b=1/a$。

习 题 三

1. 在算术中项-几何中项不等式（4.19）中，首先设m_1个a_i等于相同的数值y_1，其次设m_2个a_i等于相同的数值y_2，最后设m_k个a_i等于相同的数值y_k，并注意到

$$m_1+m_2+\cdots+m_k=n,$$

于是得到第一个不等式。对于第二个不等式，设

$$\frac{m_1}{n}=r_1,\qquad \frac{m_2}{n}=r_2,\qquad \cdots,\qquad \frac{m_k}{n}=r_k.$$

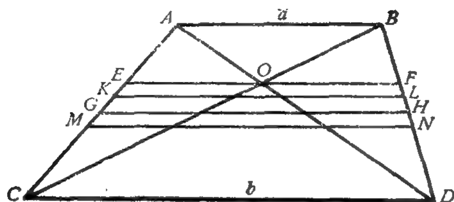
2. 8.5，9.1^+；　0.5，0.7^+；　p，p。
3. 中间步骤：$(a-b)^2\geqslant0$；或者参见第 2.8 节后面习题中的第 1 题。当且仅当$a=b$时等式成立。因为均方根大于或等于算术中项，所以它也大于或等于几何中项及调和

中项。

4. (a) 一条对角线分GH为两段，一段的长度为$a/2$，另一段的长度为$b/2$。

(b) 若 $ABLK \sim KLDC$，则 $AB/KL = KL/CD$， 且 $KL = \sqrt{ab}$。

(c) 调和中项是$\frac{2ab}{a+b} = h$。



为了证明 $EF = h$，先证明 $EO = OF$，再 利 用 相 似三角形：

$$\frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC} .$$

但是

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EO}{AB},$$

因此

$$\frac{EO}{CD} = 1 - \frac{EO}{AB} \quad 或 \quad EO\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) = 1;$$

这样

$$EO = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2}h,$$

从而

$$EF = 2EO = h.$$

(d) 设$MN = r$，并设 x，y 分别是组成梯形的两个不规则四边形的高，因此$x+y$是$ABDC$的高。于是，由假设知

$$\frac{r+a}{2}\cdot x = \frac{1}{2}\ \frac{a+b}{2}(x+y),$$

$$\frac{r+b}{2}\cdot y = \frac{1}{2}\ \frac{a+b}{2}(x+y).$$

此线性方程组当且仅当

$$r^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

时有一个解；因此 r 是 a 与 b 的均方根。

第 五 章

习 题 一

1. 由第2.7节后面的习题中第3题知 $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$，把它与 $2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca)$ 相加，得到 $3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2$，从而

$$A = 2(ab+bc+ca)\leqslant\frac{2}{3}(a+b+c)^2$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{E}{4}\right)^2 = \frac{E^2}{24}.$$

当且仅当$a=b=c$时，不等式$ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$中的等号成立。

2. 如果一个长方体的表面积A为一固定值，那么十二条棱长之和至少为$2\sqrt{6A}$，并当且仅当$E=2\sqrt{6A}$时，此

长方体是一立方体。这个证明从第 1 题的不等式 $A\leqslant E^2/24$立即可得。

3. 设A=面积，P=周长，a与b=边长，c=对角线长度。由算术中项与均方根间的不等式(第4.3节后面习题中第 3 题)，得

$$P=2(a+b)=4\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\sqrt{2}\,c.$$

由几何中项与算术中项间的不等式，得

$$A=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{P^2}{16}.$$

因此

$$A\leqslant\frac{c^2}{2}.$$

当且仅当$a=b$时，等号成立。从而正方形有最大周长($2\sqrt{2}\,c$)及最大面积($c^2/2$)。

习　题　二

1. 若$y=z$，则$s-y=s-z=x/2$，因此

$$I^2=s(s-x)(s-y)(s-z)=s(s-x)\frac{x}{2}\,\frac{x}{2}$$

$$=\frac{s}{4}x^2(s-x).$$

若$x=y=z$，则$s-x=s-y=s-z=s/3$，因此

$$E^2=s(s-x)(s-y)(s-z)=\frac{s^4}{27}.$$

2. 将第 1 题的E^2，I^2及A^2代入，然后乘出来，并比较各项。

3. 右端的每个因子都是非负的，或者因为它是平方，或者根据它的几何含义。当且仅当 $x=2s/3$,即当且仅当等腰三角形实际上是等边三角形时，有 $E^2=I^2$，当且仅当 $x=s$ 或 $y=z$，即当且仅当一般三角形是等腰三 角形时，有 $I^2=A^2$。

4. 第 2 个不等式。参见上面第 3 题解答中关于$I^2=A^2$的讨论。

5. 第 1 个不等式。参见上面第 3 题解答中关于$E^2=I^2$的讨论。

6. 此公式表明，如果这个三角形仅仅是等腰的，那么它的面积的平方等于有相同周长的等边三角形面积的平方再减去一个确定量(E^2-I^2)，如果这个三角形不是等腰的，那么还要减去(E^2-A^2)，因此减得更多。

7. 令 a 与 b 为二直角边长，c 为斜边长，t 为斜边上的高，则由相似三角形，$t=ab/c$。再根据算术中项-几何中项不等式，有

$$t=\frac{ab}{c}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}=\frac{c}{2},$$

当且仅当$a=b$时，即这个直角三角形是等腰三角形时，等式成立。

习 题 三

1. $(5,-3)$。

2. $\pm\frac{3}{5}\sqrt{46}$；$-\frac{3}{5}\sqrt{46}\leqslant y\leqslant\frac{3}{5}\sqrt{46}$。

3. $\frac{-x}{10}+\frac{y}{6}=1$。

4. 若用线性方程中的 x 来表达 y，并把结果代入二次方程，则其判别式为 $4a^2b^2n^2(a^2m^2+b^2n^2-k^2)$；若

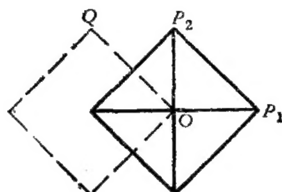
$$k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2n^2},$$

则此表达式为零。相应的重根由(5.23)式给出。

第 六 章

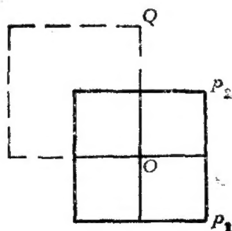
习 题 一

1.



直径的城市街区长度为2，并且每边的城市街区长度为 $d_1(P_1,P_2)=d_1(O,Q)=2$。因此周长的城市街区长度为 $(4)(2)=8$，从而要求的比值为 $r=8/2=4$。

2.



直径的非欧长度为2，且每边的非欧长度为

$$d_\infty(P_1P_2)=d_\infty(OQ)=2.$$

因此周长的非欧长度为8，从而 $r=8/2=4$。

3. 提示　边数为偶数且中心在原点的每一个正多边形可以放置在关于坐标轴对称的两个不同的位置上。试证明：

(a) 若多边形的边数能被4除尽，则每边的非欧长度为$2\text{tg}(180°/N)$（因此其周长的非欧长度为

$$2N\text{tg}(180°/N))；$$

(b) 若边数为偶数但是不能被4除尽，则每边长度为$2\sin(180°/N)$（因此其周长为$2N\sin(180°/N)$）；

(c) (a)与(b)的结果对多边形的所有可能位置都对。因为$N=8$能被4除尽，所以有

$$直径=2，$$

$$周长的非欧长度=16\text{tg}(180°/N)=16\text{tg}22.5°.$$

$$r=\frac{16\text{tg}22.5°}{2}=8(\sqrt{2}-1)\approx3.314.$$

4. 因为$N=10$不能被4除尽，所以有

$$直径=2，$$

$$周长的非欧长度=20\sin(180°/10)，$$

$$r=\frac{20\sin18°}{2}=10\sin18°\approx3.090.$$

不 等 式 入 门

E·贝肯巴赫　R·贝尔曼　著

文　丽　译

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　5印张　93千字

1985年2月第一版　1985年2月第一次印刷

印数：00001—40,000册

统一书号：13209·96　定价：0.~~83~~元 90

封面设计：常燕生

书号：13209·96

定价：0.90元